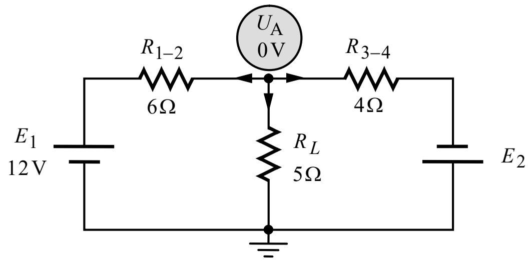
# פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2021 מועד א׳

## **שאלה 1**

א. נשרטט את המעגל המתקבל ולאחר מכן נבאר:




לשם נוחות הפתרון, את הנגדים שבטור למקורות חיברנו מראש לנגדים שקולים. נתון בסעיף זה שההספק של $R_L$ הוא אפס. לפיכך גם המתח והזרם שלו הם אפס. מכאן שאין הפרש פוטנציאלים בין שני הדקיו. כעת, אם נקבע את הצומת שמתחתיו כאדמה שהפוטנציאל שלה אפס, אזי גם הפוטנציאל בצומת שמעליו שסומן ב- $U_A$ יהיה אפס, וכפי שציינו מראש על גבי המעגל.

נפתור במתחי צמתים. קבענו כרגיל את כל הזרמים כיוצאים מהצומת. נרשום את משוואת הזרמים לצומת A:

**שלב א׳:**

$$I_{R_{1-2}}+\cancel{I_{R_L}}+I_{R_{3-4}}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

**שלב ב׳:**

$$\frac{U_A-E_1}{R_{1-2}}+\frac{U_A-(-E_2)}{R_{3-4}}=0$$

במקרה זה ש- $U_A=0$, ו- $E_2$ נעלם, אין צורך לסדר את המשוואה כרגיל, אלא נוכל להציב ערכים כבר בשלב זה ולפתור:

$$\frac{0-12}{6}+\frac{0-(-E_2)}{4}=0$$

$$E_2=8(\mathrm{V})$$

ב. בסעיף זה עדיין $U_A=0$. נחשב את הזרמים בעזרת ביטויי הזרמים שניסחנו לעיל בשלב ב׳:

$$I_{E_1}=\frac{U_A-E_1}{R_{1-2}}=\frac{0-12}{6}=-2(\mathrm{A})$$

$$I_{E_2}=\frac{U_A-(-E_2)}{R_{3-4}}=\frac{0+8}{4}=2(\mathrm{A})$$

תוצאת הזרם של $E_1$ יצאה שלילית, מה שאומר שכיוונו של זרם זה הפוך להנחה ההתחלתית – כלומר הוא נכנס לצומת A. נמצא שבשני המקורות הזרם יוצא מההדק החיובי שלהם, ולכן **שניהם ספקים** (נציין שלמעשה יכולנו להסתפק כאן בחישוב של רק אחד מהזרמים, שהרי מכיוון שלא מתפצל שום זרם לכיוונו של $R_L$, אותו הזרם זורם בשני המקורות).

נחשב את הספקי המקורות:

$$P_{E_1}=E_1\cdot I_{E_1}=12\cdot 2=24(\mathrm{W})$$

$$P_{E_2}=E_2\cdot I_{E_2}=8\cdot 2=16(\mathrm{W})$$

ג. בסעיף זה נתון $P_{R_L}=5\mathrm{W}$. הדבר אומר שעכשיו יש מתח וזרם על $R_L$. נפתור סעיף זה באותה הדרך שבה פתרנו את סעיף א'. כל ההבדל הוא, שכעת $U_{\mathrm{A}}$ אינו אפס. מתח זה הוא למעשה המתח על $R_L$. ניעזר בהספק הנתון ונחשב תחילה את $U_{\mathrm{A}}$:

$$P_{R_L}=\frac{{U_{\mathrm{A}}}^2}{R_L}$$

$$U_{\mathrm{A}}=\sqrt{P_{R_L}\cdot R_L}=\sqrt{5\cdot 5}=5(\mathrm{V})$$

מכאן נלך בדרך של סעיף א'. נרשום את משוואת הזרמים לצומת A:

**שלב א':**

$$I_{R_{1-2}}+I_{R_L}+I_{R_{3-4}}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

**שלב ב':**

$$\frac{U_{\mathrm{A}}-E_1}{R_{1-2}}+\frac{U_{\mathrm{A}}-0}{R_L}+\frac{U_{\mathrm{A}}-(-E_2)}{R_{3-4}}=0$$

נציב ערכים ונפתור:

$$\frac{5-12}{6}+\frac{5}{5}+\frac{5+E_2}{4}=0$$

$$E_2=-4.333(\mathrm{V})$$

קיבלנו תוצאה שלילית ולכן כיוונו של $E_2$ הפוך להנחה ההתחלתית. מבחינה מעשית הדבר אומר, שעל מנת לקבל הספק של 5W על $R_L$ כנדרש בסעיף זה, נדרש ש- $E_2$ יהיה בגודל שחישבנו, וכיוונו צריך להיות הפוך למתואר במקור בשאלה.

<u>**הרחבה:**</u> בסעיף זה היה נתון $P_{R_L}=5\mathrm{W}$, אולם לא היה נתון כיוונו של הזרם דרך $R_L$. אנו פתרנו על סמך ההנחה שהזרם דרך $R_L$ הוא בכיוון מטה, אולם באותה מידה היה ניתן להניח להיפך. במקרה זה האחרון נקבל כי $U_{\mathrm{A}}=-5\mathrm{V}$. הצבת ערך זה במשוואת מתחי הצמתים לעיל נותנת תוצאה נוספת אפשרית עבור $E_2$:

$$\frac{-5-12}{6}+\frac{-5}{5}+\frac{-5+E_2}{4}=0$$

$$E_2=20.333(\mathrm{V})$$

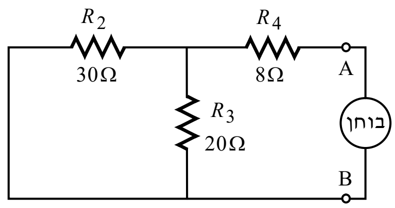
במקרה זה קיבלנו תוצאה חיובית, ולכן כיוונו של $E_2$ הוא כמתואר בשאלה.

הוספנו פיתרון זה כהרחבה בלבד, שכן נראה שכותב השאלה התכוון לפתרון אחד (הואיל ולא ביקש למצוא שני ערכים ל- $E_2$), זה שפתרנו תחילה.

## **שאלה 2**

א. **חישוב התנגדות תבנין:**

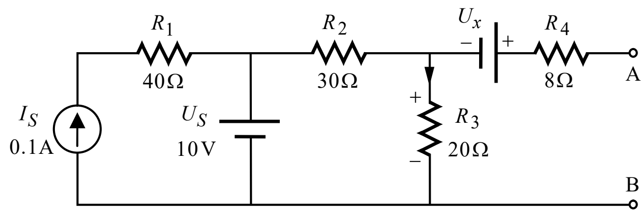
נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:




$$R_{\text{Th}} = R_2 \parallel R_3 + R_4 = \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)^{-1} + 8 = 20(\Omega)$$

ב. **חישוב מתח תבנין:**

נשרטט את המעגל:




מתח תבנין הוא המתח בין A ל-B. נחשב מתח זה בעזרת מסלול מתחים העובר דרך $R_4$, $U_x$, ו- $R_3$. אנו נחשב את $E_{\text{Th}}$ כרגיל, אלא שאת $U_x$ נשאיר כנעלם.

נבאר כיצד קבענו את קוטביות המתח על $R_3$: מכיוון שלא מתפצל זרם לכיוונו של $R_4$, אותו הזרם זורם דרך $R_2$ ו- $R_3$. במילים אחרות הם מחוברים ביניהם בטור. שני נגדים אלה מחוברים במקביל למקור המתח $U_S$. כיוונו של $U_S$ גורם לזרם בכיוון מטה דרך $R_3$, ומכאן נגזרה קוטביות המתח של נגד זה.

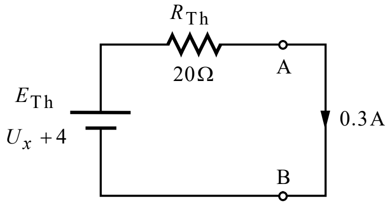
נחשב את ערך המתח על $R_3$ בעזרת כלל מחלק המתח:

$$U_{R_3} = \frac{U_S \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 20}{30+20} = 4(\text{V})$$

המתח על $R_4$ הוא אפס. נמצא ביטוי עבור $E_{\text{Th}}$:

$$E_{\text{Th}} = U_{\text{AB}} = +U_x + U_{R_3} = U_x + 4$$

ג. מכיוון שחוט הקצר מחובר בין A ל-B ניתן יהיה להיעזר במעגל תבנין. נשרטט את המעגל ונציין על גביו את הידוע לנו:




מכאן נוכל לחשב בקלות את $U_x$:

$$E_{Th} = I \cdot R_{Th}$$

$$U_x + 4 = I \cdot R_{Th}$$

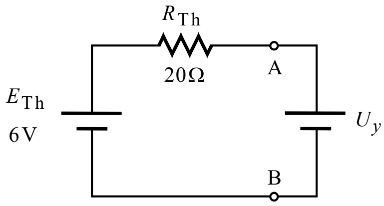
$$U_x + 4 = 0.3 \cdot 20$$

$$U_x = 2(V)$$

ד. כעת לאחר שחישבנו את $U_x$, נוכל לחשב את ערכו של $E_{Th}$:

$$E_{Th} = U_x + 4 = 2 + 4 = 6(V)$$

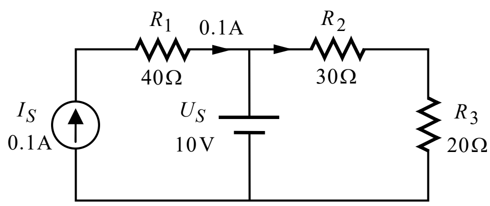
נסמן את המקור האידיאלי ב- $U_y$, נחבר אותו למעגל תבנין ונקבל:




מהשרטוט עולה בבירור, שעל מנת שלא יזרום זרם דרך $U_y$, עליו להיות בכיוון המתואר, וערכו צריך להיות שווה ל- $E_{Th}$:

$$U_y = E_{Th} = 6(V)$$

ה. נשרטט את חלק המעגל "הפעיל" ונציין על גביו את הידוע לנו:




כיוונו של הזרם דרך $R_2$ ו- $R_3$ נקבע בהתאם לנאמר לעיל סעיף ב'. נחשב את ערכו של זרם זה:

$$I_{R_{2-3}} = \frac{U_S}{R_{2-3}} = \frac{10}{30+20} = 0.2(A)$$

על פי חוק הזרמים של קירכהוף מתקבל:

$$I_{U_S} = I_{R_{2-3}} - I_S = 0.2 - 0.1 = 0.1(A)$$

נחשב את ההספק של $U_S$:

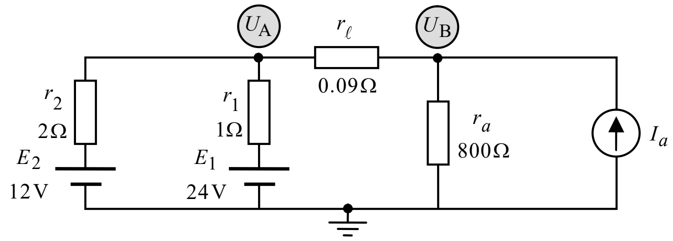
$$P_{U_S} = U_S \cdot I_{U_S} = 10 \cdot 0.1 = 1(W)$$

## **<u>שאלה 3</u>**

א. נחשב תחילה את $r_\ell$ בעזרת נתוני השאלה:

$$r_\ell = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{0.018 \cdot 3}{0.6} = 0.09(\Omega)$$

נשרטט את המעגל בצורה נוחה לעבודה:




נדרש לחשב את $I_a$ שעבורו שני מקורות המתח יהיו צרכנים. על מנת שמקורות מתח יהיו צרכנים, צריך שהזרם דרכם ייכנס להדק החיובי שלהם. לשם כך נדרש ש- $U_A$ יהיה גדול מכל אחד מהם. במילים אחרות, נדרש ש- $U_A$ יהיה גדול מ-24V.

לשם נוחות הפתרון, נפתור עבור $U_A = 24V$. ניעזר בשיטת מתחי הצמתים (מכיוון שאנו רוצים לחשב רק את $I_a$, נקצר מעט בהצגת שלבי השיטה). נרשום את משוואת הזרמים לצומת A:

$$\frac{U_A - E_2}{r_2} + \frac{U_A - E_1}{r_1} + \frac{U_A - U_B}{r_\ell} = 0$$

נציב ערכים ונחשב את $U_B$:

$$\frac{24-12}{2} + \frac{24-24}{1} + \frac{24-U_B}{0.09} = 0$$

$$U_B = 24.54(V)$$

נרשום כעת את משוואת הזרמים לצומת B ונחשב את $I_a$:

$$\frac{U_B - U_A}{r_\ell} + \frac{U_B - 0}{r_a} - I_a = 0$$

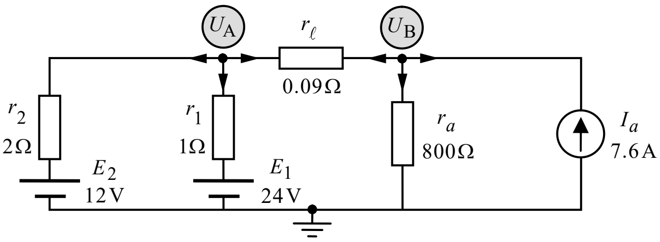
$$\frac{24.54-24}{0.09} + \frac{24.54}{800} - I_a = 0$$

$$I_a = 6.030(A)$$

תוצאה זו התקבלה על סמך ההנחה ש- $U_A$ שווה **בדיוק** ל-24V, אולם כאמור לעיל נדרש ש- $U_A$ יהיה גדול מ-24V. לשם כך נדרש:

$$I_a > 6.030(A)$$

ב. נפתור במתחי צמתים. נשרטט את המעגל המתקבל:




**<u>צומת A</u>:**

הנחנו כתמיד שכל הזרמים יוצאים מהצמתים. נרשום את משוואת הזרמים לצומת A:

**שלב א׳:** $$(A)\ I_{r_2}+I_{r_1}+I_{r_\ell}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

**שלב ב׳:** $$(A)\ \frac{U_A-E_2}{r_2}+\frac{U_A-E_1}{r_1}+\frac{U_A-U_B}{r_\ell}=0$$

נסדר את המשוואה:

**שלב ג׳:** $$(A)\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_\ell}\right)U_A-\left(\frac{1}{r_\ell}\right)U_B=\frac{E_1}{r_1}+\frac{E_2}{r_2}$$

נציב ערכים:

**שלב ד׳:** $$(A)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{0.09}\right)U_A-\left(\frac{1}{0.09}\right)U_B=\frac{24}{1}+\frac{12}{2}$$

**<u>צומת B</u>:**

נרשום את משוואת הזרמים לצומת B:

**שלב א׳:** $$(B)\ I'_{r_\ell}+I_{r_a}+I_X=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

**שלב ב׳:** $$(B)\ \frac{U_B-U_A}{r_\ell}+\frac{U_B-0}{r_a}-I_a=0$$

נסדר את המשוואה:

**שלב ג׳:** $$(B)\ -\left(\frac{1}{r_\ell}\right)U_A+\left(\frac{1}{r_\ell}+\frac{1}{r_a}\right)U_B=I_a$$

נציב ערכים:

**שלב ד׳:** $$(B)\ -\left(\frac{1}{0.09}\right)U_A+\left(\frac{1}{0.09}+\frac{1}{800}\right)U_B=7.6$$

נסכם. קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}(A)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{0.09}\right)U_A-\left(\frac{1}{0.09}\right)U_B=\frac{24}{1}+\frac{12}{2}\\(B)\ -\left(\frac{1}{0.09}\right)U_A+\left(\frac{1}{0.09}+\frac{1}{800}\right)U_B=7.6\end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן:

$$U_{\mathrm{A}}=25.045(\mathrm{V})$$

$$U_{\mathrm{B}}=25.726(\mathrm{V})$$

נבוא כעת אל המבוקש בשאלה. ניעזר בביטויים שקיבלנו לעיל בשלב ב' של כל משוואה, ונחשב את הזרמים של הנגדים השונים (נצרך גם לסעיף הבא):

$$I_{r_1}=\frac{U_{\mathrm{A}}-E_1}{r_1}=\frac{25.045-24}{1}=1.045(\mathrm{A})$$

$$I_{r_2}=\frac{U_{\mathrm{A}}-E_2}{r_2}=\frac{25.045-12}{2}=6.522(\mathrm{A})$$

$$I_{r_\ell}=\frac{U_{\mathrm{A}}-U_{\mathrm{B}}}{r_\ell}=\frac{25.045-25.726}{0.09}=-7.567(\mathrm{A})$$

$$I_{r_a}=\frac{U_{\mathrm{B}}-0}{r_a}=\frac{25.726}{800}=0.0321(\mathrm{A})$$

נחשב את ההספק של כל נגד:

$$P_{r_1}=I_{r_1}^2\cdot r_1=1.045^2\cdot 1=1.092(\mathrm{W})$$

$$P_{r_2}=I_{r_2}^2\cdot r_2=6.522^2\cdot 2=85.088(\mathrm{W})$$

$$P_{r_\ell}=I_{r_\ell}^2\cdot r_\ell=7.567^2\cdot 0.09=5.154(\mathrm{W})$$

$$P_{r_a}=I_{r_a}^2\cdot r_a=0.0321^2\cdot 800=0.827(\mathrm{W})$$

ג. ניעזר בתוצאות הזרמים שחישבנו בסעיף הקודם, ונחשב את הספקי מקורות המתח:

$$P_{E_1}=E_1\cdot I_{r_1}=24\cdot 1.045=25.085(\mathrm{W})$$

$$P_{E_2}=E_2\cdot I_{r_2}=12\cdot 6.522=78.271(\mathrm{W})$$

המתח על מקור הזרם הוא $U_{\mathrm{B}}$. נחשב את ההספק של מקור זה:

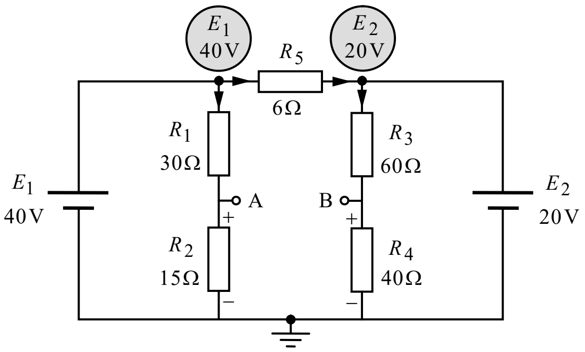
$$P_{I_a}=U_{\mathrm{B}}\cdot I_a=25.726\cdot 7.6=195.520(\mathrm{W})$$

נחשב את הנצילות בעזרת המשוואה הנתונה בשאלה:

$$\eta=\frac{P_{E_1}+P_{E_2}}{P_{I_a}}\cdot 100\%=\frac{25.085+78.271}{195.520}\cdot 100\%=52.862\%$$

## שאלה 4

א.




לשם נוחות הפתרון, בחרנו בשיטת עבודה הדומה למתחי צמתים, אלא שכאן כל מתחי הצמתים ידועים מראש (מתחי הצמתים שצוינו, התקבלו על ידי הליכה במסלול מצמתים אלה לאדמה).

כיווני הזרמים שצוינו על גבי המעגל נגזרים מערכי מתחי הצמתים (הזרם זורם תמיד מהפוטנציאל הגבוה לנמוך). מכיווני הזרמים נגזרה קוטביות המתחים של $R_2$ ו- $R_4$.

נחשב את מתחי הנגדים $R_2$ ו- $R_4$ בעזרת כלל מחלק המתח :

$$U_{R_2} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 15}{30+15} = 13.333(\mathrm{V})$$

$$U_{R_4} = \frac{E_2 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{20 \cdot 40}{60+40} = 8(\mathrm{V})$$

נחשב את המתח בין A ל-B בעזרת מסלול מתחים העובר דרך $R_2$ ו- $R_4$ :

$$U_{\mathrm{AB}} = +U_{R_2} - U_{R_4} = 13.333 - 8 = 5.333(\mathrm{V})$$

ב. הקבל במצב המתמיד שקול לנֶתֶק. המתח שיהיה בין הדקיו אז, הוא המתח בין ההדקים שנותרו במעגל לאחר ניתוקו. זהו למעשה המתח אותו חישבנו בסעיף הקודם. נחשב את האנרגיה של הקבל:

$$W_C = \frac{C \cdot {U_{\mathrm{AB}}}^2}{2} = \frac{5 \times 10^{-6} \cdot 5.333^2}{2} = 71.111(\mu\mathrm{J})$$

זוהי האנרגיה **האגורה** במעגל אותה ביקשו (שהרי אין במעגל רכיב נוסף האוגר אנרגיה).

ג. ההספק הנצרך במעגל יתקבל מסכום הספקי הנגדים (שהם בוודאי צרכנים), ובנוסף ייתכן שגם אחד מהמקורות הוא צרכן, ויש להוסיף את ההספק שלו להספק הנצרך הכולל. נבדוק זאת. נחשב את זרמי הנגדים :

$$I_{R_{1-2}} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{40}{30+15} = 0.888(\mathrm{A})$$

$$I_{R_{3-4}} = \frac{E_2}{R_3 + R_4} = \frac{20}{60+40} = 0.2(\mathrm{A})$$

$$I_{R_5} = \frac{E_1 - E_2}{R_5} = \frac{40-20}{6} = 3.333(\mathrm{A})$$

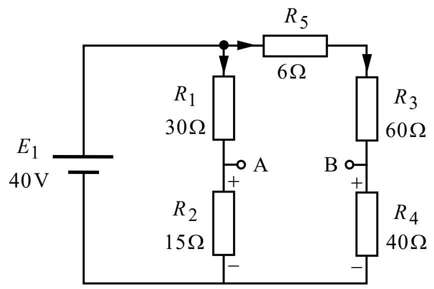
כיווני הזרמים סומנו מראש על גבי המעגל לעיל, בהתאם למה שהתבאר בסעיף א'. על פי חוק הזרמים לצמתים העליונים של המעגל, ובהתאם לתוצאות הזרמים שקיבלנו, עולה כי הזרם נכנס אל ההדק החיובי של $E_2$, ולכן מקור זה **צרכן**.

נמצא ש- $E_1$ הוא **הסַפָּק** היחידי במעגל. בשאלה ביקשו את ההספק **הנצרך** במעגל. במקום לחשב את כל הספקי הצרכנים (שזה הספקי כל הנגדים, פלוס ההספק של $E_2$), נוכל לקצר ולחשב את ההספק של $E_1$ בלבד, שהרי ההספק שמקור זה מספק, נצרך כולו על ידי שאר רכיבי המעגל. מכאן:

$$I_{E_1} = I_{R_{1-2}} + I_{R_5} = 0.888 + 3.333 = 4.222(\mathrm{A})$$

$$P_{\mathrm{T}} = P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 40 \cdot 4.222 = 168.888(\mathrm{W})$$

ד. נשרטט את המעגל המתקבל:




כאמור לעיל סעיף ב', הקבל שקול לנֶתֶק במצב המתמיד, והמתח הסופי שלו הוא המתח בין A ל-B. במעגל שהתקבל הנגד $R_5$ מחובר בטור ל- $R_3$ ו- $R_4$. נמצא שהמעגל מכיל שני ענפים המחוברים במקביל למקור המתח $E_1$.

נלך בדרך דומה לסעיף א'. נחשב את מתחי הנגדים $R_2$ ו- $R_4$ בעזרת כלל מחלק המתח:

$$U_{R_2} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 15}{30 + 15} = 13.333(\mathrm{V})$$

$$U_{R_4} = \frac{E_1 \cdot R_4}{R_5 + R_3 + R_4} = \frac{40 \cdot 40}{6 + 60 + 40} = 15.094(\mathrm{V})$$

נחשב את המתח בין A ל-B בעזרת מסלול מתחים העובר דרך $R_2$ ו- $R_4$:

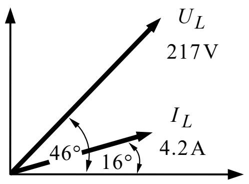
$$U_C = U_{\mathrm{AB}} = +U_{R_2} - U_{R_4} = 13.333 - 15.094 = -1.761(\mathrm{V})$$

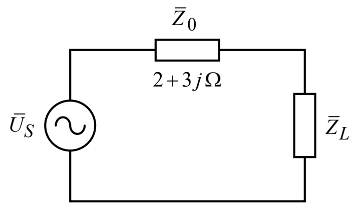
לסימן השלילי אין משמעות בשאלה זו (הוא מציין קוטביות). נחשב את המטען האגור בקבל:

$$Q_C = C \cdot U_C = 5\mu \cdot 1.761 = 8.805(\mu\mathrm{C})$$

## שאלה 5

א.




נוציא את הנתונים מהדיאגרמה:

$$\bar{U}_L = 217\angle 46°(\text{V})$$

$$\bar{I}_L = 4.2\angle 16°(\text{A})$$

נוכל לחשב את $\bar{Z}_L$:

$$\bar{Z}_L = \frac{\bar{U}_L}{\bar{I}_L} = \frac{217\angle 46°}{4.2\angle 16°} = 44.744 + 25.833j(\Omega)$$

הזרם הנתון של $\bar{Z}_L$ הוא גם הזרם דרך $\bar{Z}_0$. נחשב את מתח המקור:

$$\bar{U}_S = \bar{I}_L\left(\bar{Z}_0 + \bar{Z}_L\right) = 4.2\angle 16°(2+3j+44.744+25.833j) = 230.672\angle 47.667°(\text{V})$$

ב. ההספק הפעיל של $\bar{Z}_L$, הוא ההספק $P$ המתפתח על הרכיב ההתנגדותי של $\bar{Z}_L$. מכאן:

$$P_{Z_L} = I_L{}^2 \cdot R_{(Z_L)} = 4.2^2 \cdot 44.744 = 789.295(\text{W})$$

ג. נמצא תחילה את זווית המופע של המעגל. היא מתקבלת מהפרש המופע בין המתח והזרם הכלליים של המעגל (היא גם הזווית של העכבה השקולה). מכאן:

$$\phi = \phi_{U_S} - \phi_{I_L} = 47.667° - 16 = 31.667°$$

נחשב את גורם ההספק של המעגל:

$$PF = \cos\phi = \cos(31.667°) = 0.851$$

ד. נחשב את ההספק $P$ הכללי של המעגל:

$$P_{Z_0} = I_L{}^2 \cdot R_{(Z_0)} = 4.2^2 \cdot 2 = 35.28(\text{W})$$

$$P_{\text{T}} = P_{Z_0} + P_{Z_L} = 35.28 + 789.295 = 824.575(\text{W})$$

נחשב את זווית המופע החדשה מתוך גורם ההספק החדש הנתון:

$$\phi = \cos^{-1}(0.92) = 23.073°$$

כעת לאחר שנתונים אלה בידנו, נוכל להציב בנוסחה לשיפור גורם הספק:

$$Q_C = P(\tan\phi_1 - \tan\phi_2)$$

בנוסחה זו, $P$ הוא ההספק הפעיל הנמסר למעגל, $\phi_1$ היא זווית המופע לפני השיפור, ו-$\phi_2$ היא זווית המופע הנדרשת לאחר השיפור. מכאן:

$$Q_C = P(\tan\phi_1 - \tan\phi_2) = 824.575(\tan 31.667° - \tan 23.073°) = 157.352(\text{VAR})$$

מצאנו את ההספק ההיגבי של הקבל החדש. נחשב את קיבול הקבל בעזרת הנוסחה הבאה:

$$C=\frac{Q_C}{U^2\omega}$$

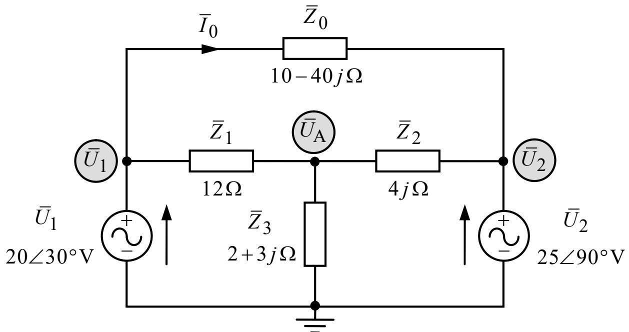
בנוסחה זו, המתח $U$ הוא מתח המקור בערך מוחלט, ו-$\omega$ היא תדירות המקור (בשאלה נתון התדר $f$). מכאן:

$$C=\frac{Q_C}{U^2\omega}=\frac{157.352}{230.672^2\cdot 2\pi\cdot 50}=9.413\left(\mu\mathrm{F}\right)$$

**<u>הערה</u>:** הרחבה על הנידון של שיפור גורם הספק ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק בהספק ואנרגיה במעגלי זרם חילופין.

## שאלה 6

א. נשרטט את המעגל בצורה נוחה לעבודה:




המתחים בצמתים הצדדיים התקבלו על ידי הליכה במסלול מתחים, מצמתים אלה לאדמה. נוכל לחשב את הזרם המבוקש באופן מיידי:

$$\bar{I}_0=\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{\bar{Z}_0}=\frac{20\angle 30°-25\angle 90°}{10-40j}=0.555\angle 35.070°(\mathrm{A})$$

ב. המתח על $\bar{Z}_3$ הוא $\bar{U}_\mathrm{A}$. נפתור במתחי צמתים. נרשום את משוואת הזרמים לצומת A. נניח כתמיד שכל הזרמים יוצאים מהצומת. מכאן:

**שלב א׳:**

$$(\mathrm{A})\ \bar{I}_{Z_1}+\bar{I}_{Z_2}+\bar{I}_{Z_3}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי עכבה:

**שלב ב׳:**

$$(\mathrm{A})\ \frac{\bar{U}_\mathrm{A}-\bar{U}_1}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_\mathrm{A}-\bar{U}_2}{\bar{Z}_2}+\frac{\bar{U}_\mathrm{A}-0}{\bar{Z}_3}=0$$

נסדר את המשוואה:

**שלב ג׳:**

$$(\mathrm{A})\ \left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}\right)\bar{U}_\mathrm{A}=\frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2}$$

נציב ערכים:

**שלב ד׳:**

$$(\mathrm{A})\ \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4j}+\frac{1}{2+3j}\right)\bar{U}_\mathrm{A}=\frac{20\angle 30°}{12}+\frac{25\angle 90°}{4j}$$

פתרון המשוואה נותן:

$$\bar{U}_\mathrm{A}=\bar{U}_{Z_3}=14.434\angle 69.923°(\mathrm{V})$$

ג. ההספק הפעיל הכולל **הנצרך** במעגל הוא הספק העכבות (שהן וודאי צרכניות), **וכן ההספק של מקורות צרכנים**.

במקום לחשב את ההספק של כל העכבות, ניתן פשוט לחשב את ההֶספקים של המקורות הַסַפָּקים, שהרי **ההספק הנצרך** במעגל שווה **להספק המסופק** למעגל. לצורך מהלך זה, עלינו יהיה לבחון לגבי כל מקור האם הוא ספק או צרכן.

נציג כאן בקיצור את השיטה המופיעה בספר "תורת החשמל" שבהוצאתנו, לבדיקת היותו מקור ספק או צרכן במעגלי זרם חילופין:

בשלב ראשון נבחן אם המתח והזרם של המקור הם באותו הכיוון. אם הם בכיוונים מנוגדים, נחשב את ההספקים כרגיל בעזרת הנוסחה $\bar{S}=\bar{U}\cdot\bar{I}^*$. אם הם באותו הכיוון, נציב סימן שלילי בשעת חישוב ההספק באופן הבא $\bar{S}=-\bar{U}\cdot\bar{I}^*$.

בשלב שני נתבונן על ההספק $P$ שקיבלנו – אם הוא חיובי המקור צרכן, ואם הוא שלילי המקור ספק (הרחבה נוספת על שיטה זו ניתן למצוא בספרנו, בפרק העוסק בהספק ואנרגיה במעגלי זרם חילופין).

נציין שבשאלה זו אנו נחשב את המתחים והזרמים באופן כזה, כך שתמיד המתח והזרם יהיו באותו כיוון, מה שאומר שנציב סימן שלילי בחישוב ההספק (ב-AC ניתן להניח כיוון כרצוננו, אם אין אילוץ אחר בשאלה).

נחשב את הזרם של $\bar{U}_1$:

$$\bar{I}_{Z_1}=\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_{\text{A}}}{\bar{Z}_1}=\frac{20\angle 30°-14.434\angle 69.923°}{12}=1.072\angle -16.051°(\text{A})$$

זרם זה חושב על סמך ההנחה שכיוונו ימינה (ולכן חיסרנו $\bar{U}_1-\bar{U}_{\text{A}}$ ולא להיפך). הזרם $\bar{I}_0$ לעיל חושב על סמך ההנחה שכיוונו ימינה. נניח כי הזרם דרך $\bar{U}_1$ הוא בכיוון מעלה, ועל פי חוק הזרמים נקבל:

$$\bar{I}_{U_1}=\bar{I}_{Z_1}+\bar{I}_0=1.072\angle -16.051°+0.555\angle 35.070°=1.485\angle 0.880°(\text{A})$$

נמצא שהמתח והזרם של $\bar{U}_1$ הם באותו הכיוון, ולפיכך נציב סימן שלילי בחישוב ההספק:

$$\bar{S}_{U_1}=-\bar{U}_1\cdot\bar{I}_{U_1}^*=-(20\angle 30°)(1.485\angle -0.880°)=-25.954-14.457j(\text{VA})$$

נעבור למקור $\bar{U}_2$. נחשב תחילה את הזרם של $\bar{Z}_2$:

$$\bar{I}_{Z_2}=\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_{\text{A}}}{\bar{Z}_2}=\frac{25\angle 90°-14.434\angle 69.923°}{4j}=3.117\angle 23.415°(\text{A})$$

זרם זה חושב על סמך ההנחה שכיוונו שמאלה. הזרם $\bar{I}_0$ לעיל חושב על סמך ההנחה שכיוונו ימינה. נניח כי הזרם דרך $\bar{U}_2$ הוא בכיוון מעלה, ועל פי חוק הזרמים נקבל:

$$\bar{I}_{U_2}+\bar{I}_0=\bar{I}_{Z_2}\quad\Rightarrow$$

$$\bar{I}_{U_2}=\bar{I}_{Z_2}-\bar{I}_0=3.117\angle 23.415°-0.555\angle 35.070°=2.575\angle 20.916°(\text{A})$$

נמצא שהמתח והזרם של $\bar{U}_2$ הם באותו הכיוון, ולפיכך נציב סימן שלילי בחישוב ההספק:

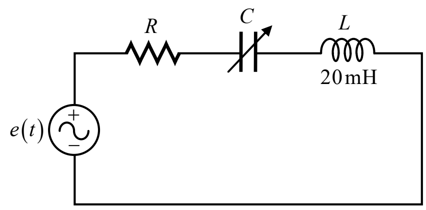
$$\bar{S}_{U_2} = -\bar{U}_2 \cdot \bar{I}_{U_2}^{\ *} = -(25\angle 90^\circ)(2.575\angle -20.916^\circ) = -22.986 - 60.143j(\mathrm{VA})$$

בשני המקורות התקבל $P$ שלילי ולכן שניהם ספקים. נחשב את גודל ההספק הפעיל הכולל:

$$P_\mathrm{T} = P_{U_1} + P_{U_2} = 25.954 + 22.986 = 48.940(\mathrm{W})$$

## <u>שאלה 7</u>

א.




נתון:

$$e(t)=100\sqrt{2}\sin(1000t)(\mathrm{V})$$

$$i(t)=10\sqrt{2}\sin\left(1000t-\frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{A})$$

בתהודה לעכבת המעגל יש רק חלק ממשי, ללא חלק מדומה כלל, וזווית המופע של המעגל היא אפס – כלומר למתח ולזרם במעגל צריכה להיות אותה הזווית, ללא שום הפרש מופע. לפי נתוני המתח והזרם, **במעגל זה למתח ולזרם יש זוויות שונות, ולכן המעגל אינו בתהודה**.

ב. נהפוך את זווית הזרם מרדיאנים למעלות. ידוע ש- $\pi$ רדיאנים שקולים ל- $180°$. מכאן:

$$\phi=-\frac{\pi}{3}(\mathrm{rad})=-\frac{180°}{3}=-60°$$

נציג את המתח והזרם הנתונים בהצגה חלקית (הצגה פאזורית). לשם כך נחלק את האמפליטודה של כל גודל ב- $\sqrt{2}$ ונקבל:

$$\bar{E}=100(\mathrm{V})$$

$$\bar{I}=10\angle-60°(\mathrm{A})$$

נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}}=\frac{\bar{E}}{\bar{I}}=\frac{100}{10\angle-60°}=5+8.660j(\Omega)$$

ישנו נגד אחד במעגל. מכאן שההתנגדות שלו שווה לחלק הממשי של העכבה השקולה:

$$R=5(\Omega)$$

**<u>הערה</u>:** ראוי לציין שתוצאה דומה היינו מקבלים גם אם היינו מציבים את תנופות המתח והזרם, ולא את הערך היעיל. ברם מכל מקום, על מנת לשמור על צורת עבודה מוכרת, בחרנו לעבוד עם הערך היעיל (העבודה עם ערך זה הופכת חובה כאשר מדובר בחישוב הספקים).

ג. תדר המקורות נתון לעיל בביטויי המקורות. נחשב את הקיבול הדרוש בעזרת הנוסחה לתדר התהודה:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{L \cdot \omega_0^{\,2}} = \frac{1}{20\times10^{-3} \cdot 1000^{\,2}} = 50\left(\mu\mathrm{F}\right)$$

ד. נחשב בעזרת הנוסחאות לתדירויות מחצית ההספק בתהודה טורית:

$$\omega_1 = +\left(\frac{R}{2L}\right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^{\,2}} = +\left(\frac{5}{2\cdot20\times10^{-3}}\right) + \sqrt{\left(\frac{5}{2\cdot20\times10^{-3}}\right)^2 + 1000^{\,2}} = 1132.782\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$\omega_2 = -\left(\frac{R}{2L}\right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^{\,2}} = -\left(\frac{5}{2\cdot20\times10^{-3}}\right) + \sqrt{\left(\frac{5}{2\cdot20\times10^{-3}}\right)^2 + 1000^{\,2}} = 882.782\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

בשאלה ביקשו את "תדרי" מחצית ההספק ולא את "תדירויות" מחצית ההספק. מכאן משמע שהכוונה לחישוב התדרים $f_{1,2}$ . נוכל לקבלם בקלות בעזרת הקשרים הבאים:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1132.782}{2\pi} = 180.287\left(\mathrm{Hz}\right)$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{882.782}{2\pi} = 140.499\left(\mathrm{Hz}\right)$$

ה. ניתן לחשב את עכבת המעגל באחת מתדירויות ההספק ולחשב את הזרם. אולם נוכל לנקוט גם בדרך מקוצרת יותר. ידוע שהזרם בתדירויות מחצית ההספק הוא קטן פי $1/\sqrt{2}$ מהזרם המקסימלי בתהודה (בערך מוחלט). בתהודה המעגל כולל את הנגד בלבד. נוכל בקלות לחשב את הזרם בתהודה ומשם את הזרם המבוקש:

**בתהודה** $$\left|I_0\right| = \frac{\left|E\right|}{R} = \frac{100}{5} = 20\left(\mathrm{A}\right)$$

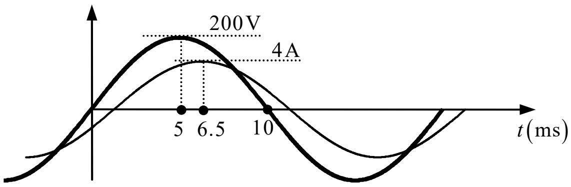
**בתדירויות מחצית ההספק** $$\left|I_{1,2}\right| = \frac{\left|I_0\right|}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14.142\left(\mathrm{A}\right)$$

נציין שבשתי תדירויות מחצית ההספק מתקבל אותו גודל של זרם בדיוק, בערך מוחלט. עוד נציין כי בתדרי מחצית ההספק מתקבל מצב מיוחד בו זווית המופע של המעגל היא $45°$ בדיוק. מכיוון שזווית מקור המתח כאן היא אפס, זווית הזרם שקיבלנו תהא $45°$ או $-45°$ (ישנן שתי אפשרויות – עבור שני תדרי מחצית ההספק אותם חישבנו לעיל).

<u>**הערה:**</u> הרחבה על הנידון של תדרי מחצית ההספק ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק במעגלי תהודה.

## **שאלה 8**

א.




הערכים הנתונים בשאלה הם תנופות המתח והזרם (האמפליטודות). הערכים היעילים יתקבלו בעזרת הקשרים הידועים הבאים:

$$U_{\text{rms}}=\frac{U_{\text{m}}}{\sqrt{2}}=\frac{200}{\sqrt{2}}=141.421(\text{V})$$

$$I_{\text{rms}}=\frac{I_{\text{m}}}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2.828(\text{A})$$

ב. נתבונן באיור לעיל ונראה כי שיא המתח הראשון מתרחש בזמן $t=5\text{ms}$ (בשאלה היה נתון רק סוף חצי המחזור הראשון של המתח, בזמן $t=10\text{ms}$. מכאן שזמן שיא המתח הראשון הוא חצי מזה). לעומת זאת שיא הזרם הראשון מתרחש בזמן $t=6.5\text{ms}$. נמצא שהזרם מפגר אחרי המתח ב- $1.5\text{ms}$. "נתרגם" פרק זמן זה לזווית בעזרת הנוסחה הבאה:

$$\phi=\frac{\Delta t}{T}\cdot 360^\circ$$

זוהי נוסחת עזר להמרת זמן לזווית. הגודל $\Delta t$ הוא פרק הזמן שאותו אנו ממירים, ו- $T$ הוא זמן המחזור של האותות – $20\text{ms}$ (כפי שמובן מהאיור). מכאן:

$$\phi=\frac{\Delta t}{T}\cdot 360^\circ=\frac{1.5\text{m}}{20\text{m}}\cdot 360^\circ=27^\circ$$

זהו הפרש המופע בין המתח והזרם. כלומר הזרם מפגר אחרי המתח ב- $27^\circ$. נתון שזווית המתח היא אפס. נמצא שזווית הזרם היא $-27^\circ$. נחשב את תדירות המקורות:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{20\text{m}}=314.159\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

נרשום את משוואת הזרם כתלות בזמן:

$$i(t)=I_{\text{m}}\sin(\omega t-\phi)=4\sin(314.159t-27^\circ)(\text{A})$$

ג. נציג את המתח והזרם בהצגה חלקית (פאזורית). על פי התוצאות לעיל מתקבל:

$$\bar{U}=141.421\angle 0^\circ(\text{V})$$

$$\bar{I}=2.828\angle -27^\circ(\text{A})$$

נחשב את עכבת הצרכן:

$$\bar{Z}=\frac{\bar{U}}{\bar{I}}=\frac{141.421\angle 0^\circ}{2.828\angle -27^\circ}=44.550+22.699j(\Omega)$$

נמצא שניתן לייצג את העכבה על ידי **נגד וסליל** המחוברים בטור.

ערך הנגד הוא החלק הממשי של העכבה:

$$R = 44.55(\Omega)$$

**היגב** הסליל הוא החלק המדומה של העכבה. נמצא את **השראות** הסליל בעזרת הקשר הבא:

$$X_L = \omega L \Rightarrow$$

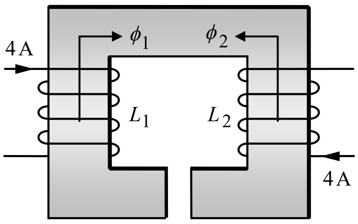
$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{22.699}{314.159} = 72.254(\text{mH})$$

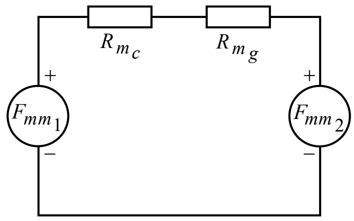
ד. ההספק הפעיל הוא ההספק **על הנגד** שבעכבה. מכאן:

$$P = I_{\text{rms}}^2 \cdot R = 2.828^2 \cdot 44.55 = 356.402(\text{W})$$

## שאלה 9

א. נשרטט את המעגל המגנטי המקורי, ובצידו את ״המעגל החשמלי״ האנלוגי למעגל המגנטי :




**ביאור:** את המעגל המגנטי המקורי שרטטנו ללא מקור הזרם (השארנו את הגודל והכיוון של הזרם המתקבל עבור כל סליל). כיווני השטפים המתוארים התקבלו על פי כלל יד ימין לסולנואיד.

במעגל האנלוגי שבצד ימין של האיור, כל סליל מיוצג בעזרת כמ״מ. כיוון הכמ״מ של כל סליל נקבע בהתאם לכיוון השטף שהוא יוצר. במעגל שלנו קיימים שני מיאונים – מיאון הליבה שסומן ב- $R_{m_c}$ ומיאון חריץ האוויר שסומן ב- $R_{m_g}$.

ב. נרכז את הנתונים הרלוונטיים :

$$\ell_c = 400(\text{mm}) = 400\times10^{-3}(\text{m})$$

$$\ell_g = 0.8(\text{mm}) = 0.8\times10^{-3}(\text{m})$$

$$A = 2\left(\text{cm}^2\right) = 2\times10^{-4}\left(\text{m}^2\right)$$

$$\mu_r = 3000$$

$$N_1 = 500$$

$$N_2 = 300$$

$$I_1 = I_2 = I_S = 4(\text{A})$$

נחשב את מיאוני המעגל:

$$R_{m_c} = \frac{\ell_c}{\mu_0\mu_r A} = \frac{400\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot3000\cdot2\times10^{-4}} = 530.516\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0 \cancel{\mu_r} A} = \frac{0.8\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot2\times10^{-4}} = 3.183\times10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_T} = R_{m_c} + R_{m_g} = 530.516\times10^3 + 3.183\times10^6 = 3.713\times10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

נחשב את הכמ״מ של כל סליל:

$$F_{mm_1} = N_1\cdot I_1 = 500\cdot4 = 2000(\text{AT})$$

$$F_{mm_2} = N_2\cdot I_2 = 300\cdot4 = 1200(\text{AT})$$

נחשב את השטף הכללי (בדומה לחישוב זרם במעגל חשמלי):

$$\phi_{\mathrm{T}}=\frac{F_{mm_1}-F_{mm_2}}{R_{m_{\mathrm{T}}}}=\frac{2000-1200}{3.713\times 10^{6}}=215.423(\mu\,\mathrm{Wb})$$

כיוון השטף הכללי הוא ככיוון המאולץ על ידי הכמ"מ הגדול יותר מבין השניים – **עם כיוון השעון**.

<u>**הערה:**</u> ניתן היה לחשב את השטף הכללי על ידי חישוב השטף הנוצר על ידי כל סליל בנפרד, ואז לחסר בסופרפוזיציה. אולם מכיוון שאין לנו צורך בשאלה זו בשטף של כל סליל בנפרד, העדפנו את הדרך הראשונה.

ג. את ההשראות נחשב בעזרת הנוסחה הבאה:

$$L=\frac{N^{2}}{R_{\mathrm{m}}}$$

כאשר יש במעגל כמה סלילים, יש להציב את $R_{\mathrm{m}}$ "שרואה" כל סליל. במקרה שלנו כל סליל "רואה" את אותו המיאון – המיאון הכללי של המעגל. מכאן:

$$L_1=\frac{{N_1}^{2}}{R_{m_{\mathrm{T}}}}=\frac{500^{2}}{3.713\times 10^{6}}=67.319(\mathrm{mH})$$

$$L_2=\frac{{N_2}^{2}}{R_{m_{\mathrm{T}}}}=\frac{300^{2}}{3.713\times 10^{6}}=24.235(\mathrm{mH})$$

<u>**הערה:**</u> ביאור מלא אודות מעגל מגנטי הכולל יותר מסליל אחד ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק במעגלים מגנטיים.

ד.

$$M=k\sqrt{L_1\cdot L_2}=1\sqrt{67.319\,\mathrm{m}\cdot 24.235\,\mathrm{m}}=40.391(\mathrm{mH})$$

ה. ההתנגדות של סליל 1 נתונה בשאלה:

$$R_1=3(\Omega)$$

את ההתנגדות של סליל 2 נחשב מתוך נתוני המוליך שבשאלה:

$$R_2=\frac{\rho\ell}{A}=\frac{0.018\cdot 100}{0.6}=3(\Omega)$$

מבקשים את ההספק במקור הזרם. כלומר סעיף זה עוסק בחשמל ולא במגנטיות. מקור הזרם מחובר לשני נגדים בטור – ההתנגדויות של המוליכים מהם עשויים הסלילים. מכאן:

$$P_{I_S}={I_S}^{2}(R_1+R_2)=4^{2}(3+3)=96(\mathrm{W})$$

## <u>שאלה 10</u>

א. במעגל זה פועלים מקורות מסוגים שונים – מקור DC ומקור AC, ולכן יש לפותרו בסופרפוזיציה. נבחן את התרומה של כל מקור בנפרד למתח המבוקש.

**<u>תרומת מקור ה-AC:</u>**

מקור ה-AC נתון על ידי:

$$v_1(t)=5\sin(1000t)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

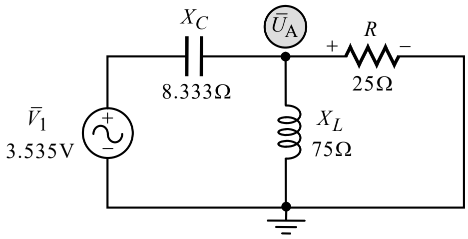
$$\bar{V}_1=\frac{5}{\sqrt{2}}=3.535(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L=\omega L=1000\cdot 75\times 10^{-3}=75(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot 120\times 10^{-6}}=8.333(\Omega)$$

נקצר את מקור ה-DC ונשרטט את המעגל המתקבל:



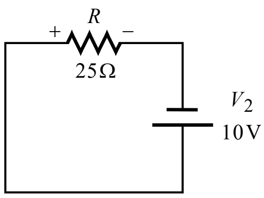

התבקשנו בשאלה לחשב את מתח הנגד. נוכל לחשבו בקלות בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_R'=\bar{U}_A=\frac{\frac{\bar{V}_1}{-jX_C}}{\frac{1}{-jX_C}+\frac{1}{jX_L}+\frac{1}{R}}=\frac{\frac{3.535}{-j8.333}}{\frac{1}{-j8.333}+\frac{1}{j75}+\frac{1}{25}}=3.724\angle 20.556°(\mathrm{V})$$

נעיר בדרך אגב, שמתח הנגד שקיבלנו גדול ממתח המקור. תופעה זו מצויה במעגלי AC, והיא נגרמת בשל יכולתם של הקבל והסליל לאגור אנרגיה, "ולשחרר" חלקים ממנה בשלבים מסוימים, כך שהם משמשים כסוג של מקור אנרגיה בחלקים מסוימים של המחזור.

**<u>תרומת מקור ה-DC:</u>**

עבור מקור DC, הקבל נתק והסליל קצר (במצב המתמיד, שהוא ברירת המחדל אם לא נאמר אחרת). נקצר את מקור ה-AC ונשרטט את המעגל המתקבל:




$$U_R''=V_2=10(\mathrm{V})$$

**נסכם את התרומות:** שני המקורות פועלים באותה מגמה על הנגד, ולכן יש לחבר בין תרומות המתחים שקיבלנו (ניתן לומר כמו כן ששני המקורות גורמים שניהם לזרם באותו הכיוון דרך הנגד, ולכן יש לחבר בין התרומות). את המתח הכולל נציג כתלות בזמן. מכאן:

$$u_R(t) = u_R''(t) + u_R'(t) = 10 + 3.724\sqrt{2}\sin(1000t + 20.556°)(\mathrm{V})$$

ב. הממוצע של אות מורכב DC עם AC שווה תמיד לערך ה-DC:

$$U_{R_{\mathrm{av}}} = U_R'' = 10(\mathrm{V})$$

**__הערה__:** ביאור מלא של הנידון שבסעיף זה והבא אחריו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק באותות מחזוריים (ראה שם את הנידון של אות סינוס עם רמת DC) וכן בפרק העוסק במשפטי רשת (תחת הנידון של משפט ההרכבה/סופרפוזיציה).

ג. את הערך היעיל השקול נוכל לקבל על ידי הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$U_{R_{\mathrm{rms}}} = \sqrt{U_{\mathrm{rms}_1}^2 + U_{\mathrm{rms}_2}^2} = \sqrt{10^2 + 3.724^2} = 10.670(\mathrm{V})$$

ד. **ההספק הממוצע** מחושב תמיד בעזרת **הערך היעיל**. מכאן:

$$P_{R_{\mathrm{av}}} = \frac{U_{R_{\mathrm{rms}}}^2}{R} = \frac{10.670^2}{25} = 4.554(\mathrm{W})$$