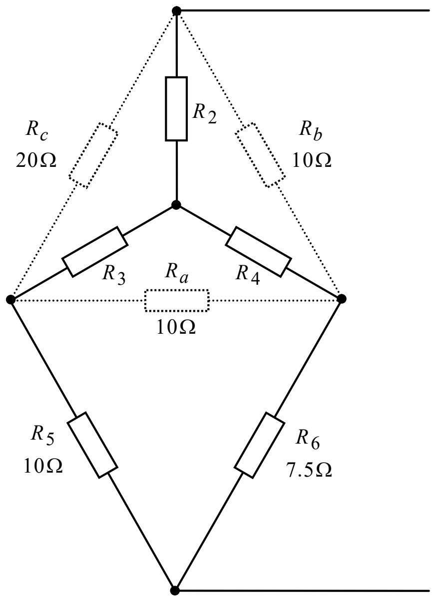
# פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2022 מועד א׳

## שאלה 1

א. תחילה נחשב את $R_1$ בעזרת הנוסחה לתלות ההתנגדות בתכונות החומר:

$$R_1=\frac{\rho\cdot\ell}{A}=\frac{0.05\cdot 330}{0.5}=33(\Omega)$$

כעת נבצע המרת משולש-כוכב על הענף השמאלי. נבחר באופן שרירותי להמיר את המשולש העליון לכוכב. נשרטט משולש זה, ואת הכוכב החדש בתוכו. נרשום את הנוסחאות הרלוונטיות כשהן מותאמות לשמות הנגדים שבחרנו, ונחשב את ערכי נגדי הכוכב:

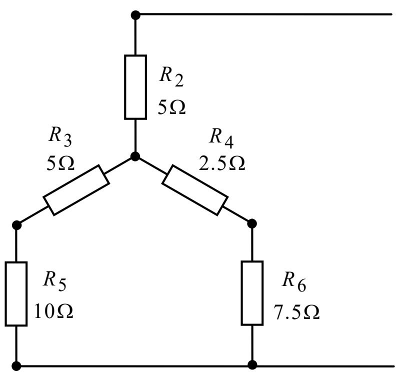



$$R_2=\frac{R_b\,R_c}{R_a+R_b+R_c}=\frac{10\cdot 20}{10+10+20}=5(\Omega)$$

$$R_3=\frac{R_a\,R_c}{R_a+R_b+R_c}=\frac{10\cdot 20}{10+10+20}=5(\Omega)$$

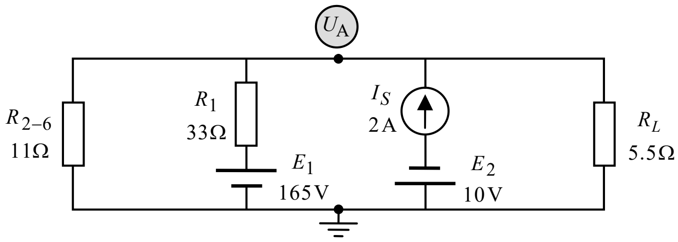
$$R_4=\frac{R_a\,R_b}{R_a+R_b+R_c}=\frac{10\cdot 10}{10+10+20}=2.5(\Omega)$$

נמחק את נגדי המשולש העליון שאותו המרנו, ונחשב את ההתנגדות השקולה של הענף:




$$R_{2-6}=(R_3+R_5)\,\|\,(R_4+R_6)+R_2=\left(\frac{1}{5+10}+\frac{1}{2.5+7.5}\right)^{-1}+5=11(\Omega)$$

נתון שבטמפרטורה של $20°C$ הנגד $R_L$ שווה ל- $5.5\Omega$. נשרטט מעגל שקול:




נפתור במילמן. יש לשים לב שמקור המתח $E_2$ נמצא בטור למקור זרם, ולכן הוא לא ייכנס למשוואה כלל (תהיה לו השפעה על המתח של מקור הזרם, וכפי שנראה בסעיף הבא). מכאן:

$$U_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}+I_S}{\frac{1}{R_{2-6}}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_L}} = \frac{\frac{165}{33}+2}{\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{5.5}} = 23.1(\mathrm{V})$$

ב. נצא למסלול מתחים מראש החץ של מקור הזרם ונקבל:

$$U_{I_S} = U_{R_L}+E_2 = U_A+E_2 = 23.1+10 = 33.1(\mathrm{V})$$

קיבלנו תוצאה חיובית, ולכן מקור הזרם **ספק**. נחשב את גודל ההספק שלו:

$$P_{I_S} = U_{I_S}\cdot I_S = 33.1\cdot 2 = 66.2(\mathrm{W})$$

ג.

$$I_{E_1} = \frac{E_1-U_A}{R_1} = \frac{165-23.1}{33} = 4.3(\mathrm{A})$$

$$P_{E_1} = E_1\cdot I_{E_1} = 165\cdot 4.3 = 709.5(\mathrm{W})$$

ד. נחשב את ההתנגדות "שרואה" הנגד $R_L$ (כמו חישוב התנגדות תבנין). נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקור הזרם, ונקבל:

$$R_{eq} = R_{2-6} \parallel R_1 = \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{33}\right)^{-1} = 8.25(\Omega)$$

התנאי להעברת הספק מקסימלי במעגלי DC הוא:

$$R_L = R_{eq} = 8.25(\Omega)$$

כאמור ההתנגדות של $R_L$ בטמפרטורה של $20°C$ היא $5.5\Omega$. נחשב את הטמפרטורה שעבורה מתקבל $R_L = 8.25\Omega$, בעזרת המשוואה להתנגדות כתלות בטמפרטורה:

$$R_{(T)} = R_{T_0}\left[1+\alpha_{T_0}\left(T-T_0\right)\right]$$

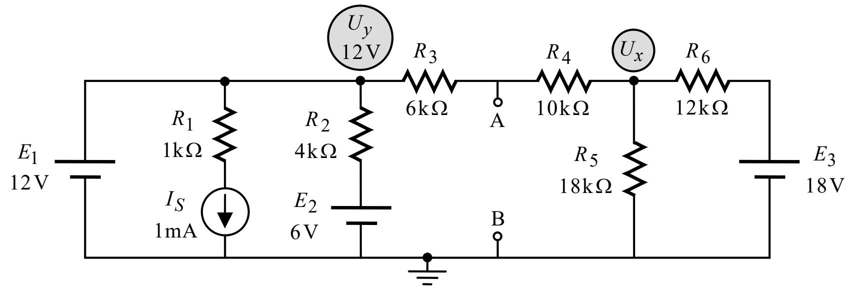
$$8.25 = 5.5\left[1+0.004(T-20)\right]$$

$$T = 145(°\mathrm{C})$$

## שאלה 2

א. **חישוב מתח תבנין:**

ננתק את $R_L$ ונשרטט את המעגל המתקבל:




המתח $U_y$ התקבל על ידי הליכה במסלול מתחים, מאותו צומת, דרך $E_1$, לאדמה. נחשב את $U_x$ בעזרת שיטת מתחי הצמתים. נרשום את משוואת הזרמים לצומת:

**שלב א':** $I_{R_{3-4}} + I_{R_5} + I_{R_6} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

**שלב ב':** $\frac{U_x - U_y}{R_{3-4}} + \frac{U_x - 0}{R_5} + \frac{U_x - E_3}{R_6} = 0$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

**שלב ג':** $\left(\frac{1}{R_{3-4}} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_x - \left(\frac{1}{R_{3-4}}\right)U_y = \frac{E_3}{R_6}$

נציין שלמרות שיש במשוואה רק נעלם אחד, מכל מקום סידרנו את המשוואה כהרגלנו במתחי צמתים, זאת על מנת לשמור על מבנה עבודה קבוע ככל שניתן, דבר העוזר למנוע טעויות מיותרות. מה גם שהדבר תורם לבידוד הנעלם שלנו $U_x$. נציב ערכים:

**שלב ד':** $\left(\frac{1}{6k+10k} + \frac{1}{18k} + \frac{1}{12k}\right)U_x - \left(\frac{1}{6k+10k}\right)12 = \frac{18}{12k}$

פתרון המשוואה נותן:

$$U_x = 11.172(V)$$

המתח המבוקש $E_{Th}$ הוא המתח בין A ל-B. נוכל לקבל מתח זה בקלות בעזרת מסלול מתחים בין נקודות אלו, העובר דרך $R_4$ ו-$R_5$. המתח על $R_5$ הוא $U_x$ שחישבנו. נחשב את המתח על $R_4$:

$$I_{R_{3-4}} = \frac{U_y - U_x}{R_{3-4}} = \frac{12 - 11.172}{6k+10k} = 0.051(mA)$$

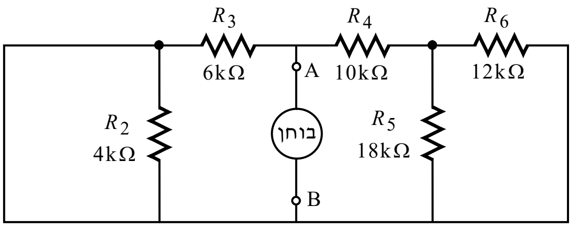
$$U_{R_4} = I_{R_{3-4}} \cdot R_4 = 0.051m \cdot 10k = 0.517(V)$$

המתח $U_y$ גדול מהמתח $U_x$, ולפיכך הזרם דרך $R_4$ זורם בכיוון ימין. בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי. מכאן:

$$E_{Th} = U_{AB} = +U_{R_4} + U_{R_5} = +U_{R_4} + U_x = 0.517 + 11.172 = 11.689(V)$$

**<u>חישוב התנגדות תבנין:</u>**

נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:

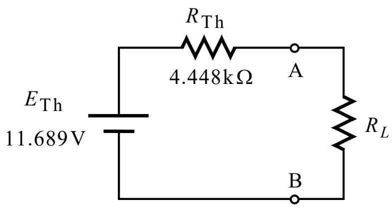



במעגל המתקבל הנגד $R_2$ מקוצר. מכאן:

$$R_{4-6} = R_4 + \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)^{-1} = 10\text{k} + \left(\frac{1}{18\text{k}} + \frac{1}{12\text{k}}\right)^{-1} = 17.2(\text{k}\Omega)$$

$$R_{\text{Th}} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{4-6}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6\text{k}} + \frac{1}{17.2\text{k}}\right)^{-1} = 4.448(\text{k}\Omega)$$

נציג את המעגל תבנין שקיבלנו:




ב. התנאי להעברת הספק מקסימלי במעגלי DC הוא:

$$R_L = R_{\text{Th}} = 4.448(\text{k}\Omega)$$

ניעזר במעגל תבנין שקיבלנו ונחשב את ההספק על $R_L$:

$$I_{R_L} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{11.689}{4.448\text{k} + 4.448\text{k}} = 1.313(\text{mA})$$

$$P_{R_L} = {I_{R_L}}^2 \cdot R_L = (1.313\text{m})^2 \cdot 4.448\text{k} = 7.679(\text{mW})$$

ג. נחבר חוט קצר למעגל תבנין שקיבלנו ונחשב את גודל הזרם:

$$I = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} = \frac{11.689}{4.448\text{k}} = 2.627(\text{mA})$$

כיוונו של $E_{\text{Th}}$ תואר במעגל תבנין לעיל (קיבלנו ערך חיובי עבור $E_{\text{Th}}$, ולכן ההדק החיובי שלו פונה אל הנקודה שממנה יצאנו למסלול המתחים – נקודה A). על פי כיוונו של $E_{\text{Th}}$, **הזרם יזרום מ-A ל-B**.

## **שאלה 3**

א. תחילה נחשב את הערך היעיל של מקור המתח, ואת היגבי המעגל. מקור המתח נתון על ידי:

$$u(t)=50\cdot\sqrt{2}\sin\left(1000t-\frac{\pi}{6}\right)(\mathrm{V})$$

הזווית של מקור המתח נתונה ברדיאנים (כך עולה מאופן ההצגה שלה). כידוע, זווית של $\pi$ ברדיאנים, אקוויוולנטית ל- 180 מעלות. ניעזר בקשר זה ונמיר את הזווית הנתונה למעלות:

$$\phi=-\frac{\pi}{6}=-\frac{180}{6}=-30^\circ$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (הצגה פאזורית):

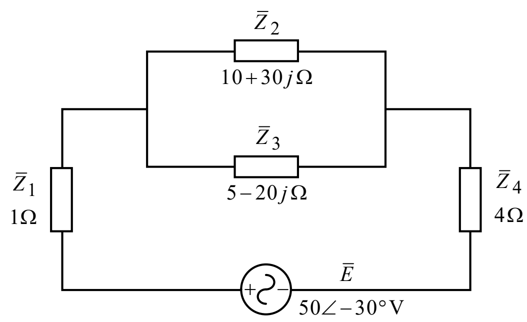
$$\bar{E}=\frac{50\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle-30^\circ=50\angle-30^\circ(\mathrm{V})$$

התדירות הזוויתית של המקור נתונה בביטוי מתח המקור לעיל. נחשב את היגבי המעגל:

$$X_L=\omega L=1000\cdot30\times10^{-3}=30(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot50\times10^{-6}}=20(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל:




לשם נוחות הפתרון, הצגנו את כל התנגדויות המעגל כעכבות. נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2\,\|\,\bar{Z}_3+\bar{Z}_4=1+\left(\frac{1}{10+30j}+\frac{1}{5-20j}\right)^{-1}+4=$$

$$=33.461-22.307j(\Omega)=40.215\angle-33.690^\circ(\Omega)$$

החלק המדומה של העכבה השקולה הוא שלילי (בהצגה הפולארית – הזווית שלילית), ולפיכך למעגל יש **אופי קיבולי**.

זווית המופע של המעגל היא גם הזווית של העכבה השקולה. נחשב בעזרתה את גורם ההספק של המעגל:

$$PF=\cos\phi=\cos(-33.690^\circ)=0.832$$

ב. נחשב את הזרם הכללי של המעגל, המסומן בשאלה ב- $I_1$ :

$$\overline{I}_1=\frac{\overline{E}}{Z_T}=\frac{50\angle-30°}{33.461-22.307j}=1.243\angle3.690°(A)$$

נחשב את הספקי מקור המתח :

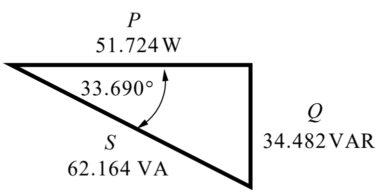
$$\overline{S}=\overline{E}\cdot\overline{I}_1^{\,*}=(50\angle-30°)(1.243\angle-3.690°)=51.724-34.482j=62.164\angle-33.690°(VA)$$

נציג את ההספקים שקיבלנו בצורה מסודרת, ונשרטט את משולש ההספקים של המעגל :

$P=51.724(W)$

$Q=34.482(VAR)$

$S=62.164(VA)$

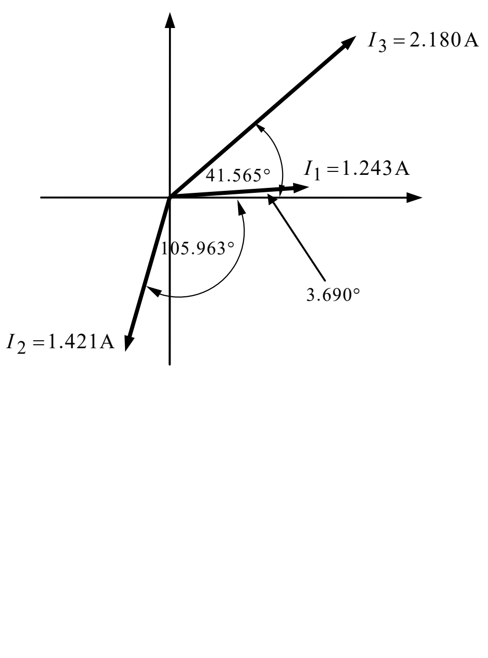



ג. את הזרם $\overline{I}_1$ חישבנו כבר בסעיף הקודם. ניעזר בכלל מחלק הזרם ונחשב את יתר הזרמים :

$$\overline{I}_2=\frac{\overline{I}_1\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}=\frac{(1.243\angle3.690°)(5-20j)}{10+30j+5-20j}=1.421\angle-105.963°(A)$$

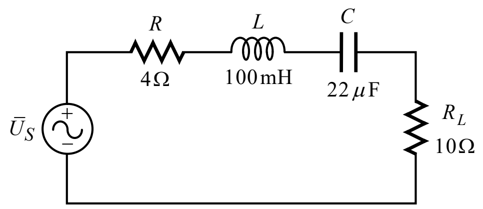
$$\overline{I}_3=\overline{I}_1-\overline{I}_2=1.243\angle3.690°-1.421\angle-105.963°=2.180\angle41.565°(A)$$

נשרטט את הדיאגרמה הפאזורית של זרמי המעגל :



## **שאלה 4**

א.




זרם מרבי יתקבל במצב של תהודה. נחשב את תדר התהודה:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100\times10^{-3}\cdot22\times10^{-6}}} = 674.199\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{674.199}{2\pi} = 107.302(\text{Hz})$$

**__הערה:__** אין לבלבל בין נידון זה לבין הנידון של העברת הספק מקסימלי, שבו בדרך כלל יש לחשב ערך של **התנגדות** שעבורה יועבר הספק מקסימלי.

ב. נוכל לחשב את מקדם הטיב (נקרא גם מקדם האיכות) למשל בעזרת הנוסחה:

$$Q = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

בנוסחה זו (וכן בשאר הנוסחאות של מקדם האיכות) יש את הגודל $R$. הגודל $R$ שבנוסחה זו, הוא גודל הנגד במעגל $RLC$ טורי, שעבורו פותחה נוסחה זו. במקרה זה בו יש לנו שני נגדים, נוכל פשוט לאחד אותם לנגד שקול, ועל ידי כך נקבל מעגל $RLC$ טורי. נסמן את הנגד השקול ב- $R_x$, זאת על מנת להבדילו מ-$R$ שבמעגל. מכאן:

$$R_x = R + R_L = 4 + 10 = 14(\Omega)$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 R_x C} = \frac{1}{674.199\cdot14\cdot22\times10^{-6}} = 4.815$$

ג. גם בנוסחה לרוחב סרט ישנו הגודל $R$. גם כאן, כמו בסעיף הקודם גודל זה הוא $R_x$ שחישבנו. מכאן:

$$BW = \frac{R_x}{2\pi L} = \frac{14}{2\pi\cdot100\times10^{-3}} = 22.281(\text{Hz})$$

**__הערה:__** הרחבה נוספת על הנידונים שהובאו בשאלה זו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק במעגלי תהודה.

ד. ההספק בעומס נתון על ידי:

$$P_{R_L} = I^2\cdot R_L$$

מכאן אנו למדים, שעל מנת לקבל את הערך המרבי האפשרי של ההספק במעגל זה, יש למצוא את הערך המרבי האפשרי של הזרם. הזרם העובר דרך $R_L$ הוא אות סינוס. הערך המרבי של הזרם הוא התנופה או האמפליטודה של אות הזרם (ולא הערך היעיל).

יש לשים לב שבשאלה נתונה התנופה/האמפליטודה/המשרעת של אות המתח. הערך המרבי של הזרם יתקבל עבור הערך המרבי של אות המתח – האמפליטודה, כלומר 1V. נזכיר שבמצב תהודה הסליל והקבל שקולים לקֶצֶר. מכאן:

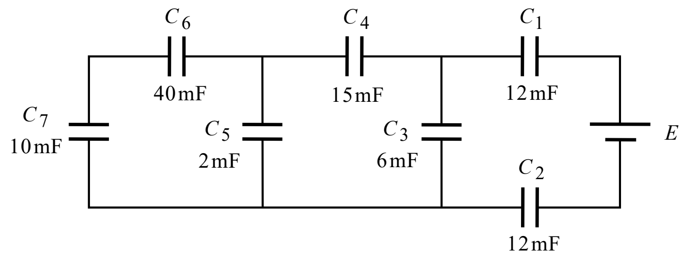
$$I_{\mathrm{m}}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{R+R_L}=\frac{1}{4+10}=0.071(\mathrm{A})$$

$$P_{R_L}=I_{\mathrm{m}}{}^2\cdot R_L=0.071^2\cdot 10=0.051(\mathrm{W})=51.020(\mathrm{mW})$$

<u>**הערה:**</u> אם היינו עובדים עם הערכים היעילים של אות המתח והזרם, היינו למעשה מחשבים את ההספק **הממוצע**, ולא את ההספק **המרבי** (למעשה, ברוב ככל השאלות בזרם חילופין, כאשר מבקשים לחשב הספק בלי לציין למה הכוונה, אנו מחשבים תמיד את ההספק הממוצע. לכן אנו תמיד עובדים עם הערך היעיל, וכמו למשל בשאלה הקודמת, אלא אם כן נאמר אחרת, וכמו בשאלה זו). ראוי לציין שאמנם במצב תהודה מתקבל **הממוצע המרבי** האפשרי במעגל הנוכחי, אך עדיין אין זה "ההספק המרבי שיכול להתפתח בנגד העומס" כלשון השאלה.

## **שאלה 5**

א.




נחשב את הקיבול השקול של המעגל:

$$C_{6-7}=\left(\frac{1}{C_6}+\frac{1}{C_7}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{40\,\text{m}}+\frac{1}{10\,\text{m}}\right)^{-1}=8(\text{mF})$$

$$C_{5-7}=C_5+C_{6-7}=2\,\text{m}+8\,\text{m}=10(\text{mF})$$

$$C_{4-7}=\left(\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_{5-7}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{15\,\text{m}}+\frac{1}{10\,\text{m}}\right)^{-1}=6(\text{mF})$$

$$C_{3-7}=C_3+C_{4-7}=6\,\text{m}+6\,\text{m}=12(\text{mF})$$

$$C_\text{T}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{3-7}}+\frac{1}{C_2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{12\,\text{m}}+\frac{1}{12\,\text{m}}+\frac{1}{12\,\text{m}}\right)^{-1}=4(\text{mF})$$

נחשב את המתח על $C_7$. בשאלה נתונה האנרגיה של קבל זה – $W_{C_7}=2.88\text{J}$. מכאן:

$$W_{C_7}=\frac{C_7\cdot U_{C_7}{}^2}{2}\quad\Rightarrow$$

$$U_{C_7}=\sqrt{\frac{2\cdot W_{C_7}}{C_7}}=\sqrt{\frac{2\cdot 2.88}{10\times10^{-3}}}=24(\text{V})$$

ב. נחשב את המטען של $C_7$:

$$Q_{C_7}=C_7\cdot U_{C_7}=10\,\text{m}\cdot 24=240(\text{mC})$$

לקבלים בטור יש אותו מטען ולכן:

$$Q_{C_6}=Q_{C_7}=240(\text{mC})$$

$$U_{C_6}=\frac{Q_{C_6}}{C_6}=\frac{240\,\text{m}}{40\,\text{m}}=6(\text{V})$$

$$U_{C_5}=U_{C_6}+U_{C_7}=6+24=30(\text{V})$$

$$Q_{C_5}=C_5\cdot U_{C_5}=2\,\text{m}\cdot 30=60(\text{mC})$$

$$Q_{C_4}=Q_{C_5}+Q_{C_6}=60\,\text{m}+240\,\text{m}=300(\text{mC})$$

$$U_{C_4}=\frac{Q_{C_4}}{C_4}=\frac{300\,\text{m}}{15\,\text{m}}=20(\text{V})$$

נחשב את המתח על $C_3$ בעזרת מסלול מתחים ביו הדקיו:

$$U_{C_3}=U_{C_4}+U_{C_5}=20+30=50(\text{V})$$

$$Q_{C_3}=C_3\cdot U_{C_3}=6\,\text{m}\cdot 50=300(\text{mC})$$

$$Q_{C_1}=Q_{C_3}+Q_{C_4}=300\,\text{m}+300\,\text{m}=600(\text{mC})$$

המטען $Q_{C_1}$ שחישבנו הוא המטען הכללי של המעגל. מכאן:

$$E=\frac{Q_\text{T}}{C_\text{T}}=\frac{600\,\text{m}}{4\,\text{m}}=150(\text{V})$$

ג.

$$W_\text{T}=\frac{C_\text{T}\cdot E^2}{2}=\frac{4\times10^{-3}\cdot150^2}{2}=45(\text{J})$$

ד. **חיבור הנגד לא יגרום לשינוי באנרגיה של המעגל**. הסיבה לכך הינה, שבסוף תהליך הטעינה הקבלים שקולים לנֶתֶק. במעגל שלנו במצב זה לא יגיע זרם כלל לנגד. נגד שאין עליו זרם גם אין עליו מתח, והוא מתפקד כחוט קצר במעגל (מוליך שאין עליו מתח). נמצא שבמקרה זה, אין הבדל במצב המתמיד אם יחובר חוט הקצר בין x ל-y, או הנגד.

## שאלה 6

א. נחשב תחילה את התנגדות המוליך ממנו בנוי הסליל. ניעזר בנוסחה לחישוב התנגדות כתלות בתכונות החומר. כל הפרמטרים נתונים בשאלה (יש לשים לב שלא לבלבל בין אורך המוליך ממנו עשוי הסליל לבין אורך הליבה, וכן בין שטח החתך של המוליך לשטח החתך של הליבה). מכאן:

$$R=\frac{\rho\ell}{A}=\frac{0.018\cdot 50}{0.2}=4.5(\Omega)$$

נרכז נתונים עבור המשך השאלה:

$$\ell_c=120(\mathrm{mm})=120\times 10^{-3}(\mathrm{m})$$

$$A=2\times 10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right)$$

$$N=500$$

$$\phi=80(\mu\,\mathrm{Wb})$$

נחשב את צפיפות השטף המגנטי $B$ בליבה:

$$B=\frac{\phi}{A}=\frac{80\times 10^{-6}}{2\times 10^{-4}}=0.4(\mathrm{T})$$

מעקום המגנוט הנתון ניתן לראות, שעבור $B$ שמצאנו, עוצמת השדה המגנטי $H$ הינה:

$$H=400\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$$

את החלחלות המגנטית $\mu_r$ נוציא מתוך הקשר הבא:

$$B=\mu_0\mu_r H \quad \Rightarrow$$

$$\mu_r=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{0.4}{4\pi 10^{-7}\cdot 400}=795.774$$

**<u>הערה</u>:** החלחלות המגנטית $\mu_r$ שמצאנו אינה קבועה, זאת מכיוון שעקום המגנוט הנתון אינו קו ישר. היא נכונה עבור השטף הנתון. הרחבה נוספת על נידון זה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק במגנטיות, ובפרק העוסק במעגלים מגנטיים.

ב. נחשב את מיאון הליבה:

$$R_{m_c}=\frac{\ell_c}{\mu_0\mu_r A}=\frac{120\times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}\cdot 795.774\cdot 2\times 10^{-4}}=600\times 10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

נחשב את השראות הסליל:

$$L=\frac{N^2}{R_{m_c}}=\frac{500^2}{600\times 10^3}=0.416(\mathrm{H})$$

נחשב את הזרם בסליל בעזרת הקשר הבא:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_{m_c}} = \frac{NI}{R_{m_c}} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{\phi \cdot R_{m_c}}{N} = \frac{80\times10^{-6}\cdot 600\times10^{3}}{500} = 0.096(\mathrm{A})$$

נוכל כעת לחשב את האנרגיה האגורה בסליל:

$$W_L = \frac{L\cdot I^2}{2} = \frac{0.416\cdot 0.096^2}{2} = 1.92(\mathrm{mJ})$$

ג. נחשב על ידי סופרפוזיציה. נבחן מהו השטף הנוצר על ידי הסליל השני, ולבסוף **נחבר** בין שני השטפים של שני הסלילים (שהרי נתון ששני השטפים הם באותו הכיוון). מכאן:

$$\phi_2 = \frac{F_{mm_2}}{R_{m_c}} = \frac{N_2\cdot I_2}{R_{m_c}} = \frac{400\cdot 3}{600\times10^{3}} = 2(\mathrm{mWb})$$

$$\phi_{\mathrm{T}} = \phi_1 + \phi_2 = 80\times10^{-6} + 2\times10^{-3} = 2.08(\mathrm{mWb})$$

ד. נחשב את המיאון החדש הכולל של הליבה מתוך הקשר הבא:

$$L = \frac{N^2}{R_{m_{\mathrm{T}}}} \quad \Rightarrow$$

$$R_{m_{\mathrm{T}}} = \frac{N^2}{L} = \frac{500^2}{0.2} = 1.25\times10^{6}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

מיאון זה מתקבל מסכום שני מיאוני המעגל המגנטי – מיאון הליבה $R_{m_c}$, ומיאון חריץ האוויר $R_{m_g}$. נחשב את מיאון חריץ האוויר:

$$R_{m_g} = R_{m_{\mathrm{T}}} - R_{m_c} = 1.25\times10^{6} - 600\times10^{3} = 650\times10^{3}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

נחשב את אורך חריץ האוויר בעזרת הקשר הבא (נזכיר שבאוויר $\mu_r = 1$):

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0 \cancel{\mu_r} A} \quad \Rightarrow$$

$$\ell_g = R_{m_g}\cdot\mu_0\cdot A = 650\times10^{3}\cdot 4\pi10^{-7}\cdot 2\times10^{-4} = 0.163(\mathrm{mm})$$

## שאלה 7

א. במעגל זה פועלים מקורות מסוגים שונים – מקור DC, ושני מקורות AC בעלי תדירות שונה. לפיכך יש לפתור שאלה זו בסופרפוזיציה, ולחשב את תרומתו של כל מקור בנפרד, למתח המבוקש.

**תרומת מקור המתח AC:**

מקור זה נתון על ידי:

$$v_1(t)=20\sin(1000t)(\mathrm{V})$$

נציג את מקור המתח בהצגה חלקית (הצגה פאזורית):

$$\bar{E}_1=\frac{20}{\sqrt{2}}=14.142(\mathrm{V})$$

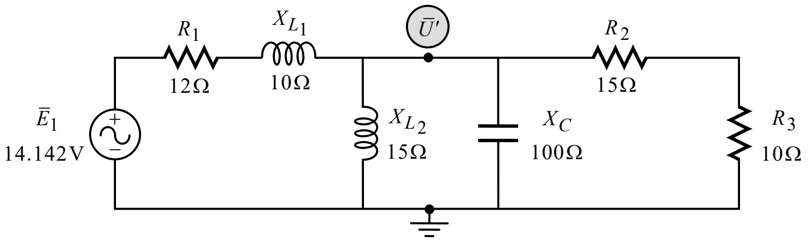
נחשב את היגבי הקבל והסלילים, המתקבלים עבור התדירות של מקור זה:

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot10\times10^{-6}}=100(\Omega)$$

$$X_{L_1}=\omega L_1=1000\cdot10\times10^{-3}=10(\Omega)$$

$$X_{L_2}=\omega L_2=1000\cdot15\times10^{-3}=15(\Omega)$$

נקצר את מקור מתח ה-DC, ננתק את מקור זרם ה-AC, ונשרטט את המעגל המתקבל:




נפתור במילמן:

$$\bar{U}'=\frac{\dfrac{\bar{E}_1}{R_1+jX_{L_1}}}{\dfrac{1}{R_1+jX_{L_1}}+\dfrac{1}{jX_{L_2}}+\dfrac{1}{-jX_C}+\dfrac{1}{R_2+R_3}}=\frac{\dfrac{14.142}{12+j10}}{\dfrac{1}{12+j10}+\dfrac{1}{j15}+\dfrac{1}{-j100}+\dfrac{1}{15+10}}=$$

$$=6.846\angle7.790°(\mathrm{V})$$

**תרומת מקור הזרם AC:**

מקור זה נתון על ידי:

$$i_1(t)=0.8\sin(2000t+60°)(\mathrm{A})$$

נציג את מקור הזרם בהצגה חלקית (הצגה פאזורית):

$$\bar{I}_1=\frac{0.8}{\sqrt{2}}\angle60°=0.565\angle60°(\mathrm{A})$$

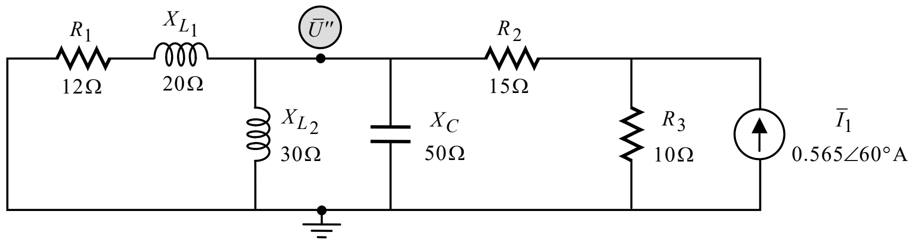
נחשב את היגבי הקבל והסלילים, המתקבלים עבור התדירות של מקור זה:

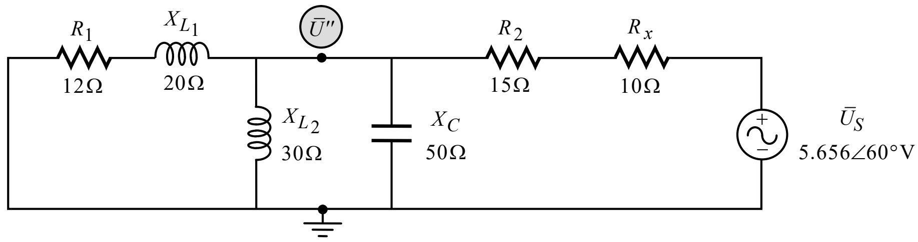
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2000 \cdot 10 \times 10^{-6}} = 50(\Omega)$$

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 2000 \cdot 10 \times 10^{-3} = 20(\Omega)$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 2000 \cdot 15 \times 10^{-3} = 30(\Omega)$$

נקצר את שני מקורות המתח ה-DC וה-AC, ונשרטט את המעגל המתקבל:




**<u>ביאור</u>:** המעגל העליון הוא המעגל שקיבלנו עבור מקור הזרם. במעגל זה ישנם שני צמתים. המעגל התחתון התקבל לאחר שהמרנו את מקור הזרם למקור מתח, ועל ידי כך "חסכנו" משוואה. ערכי מקור המתח המעשי שבשרטוט התקבלו על ידי הנוסחאות להמרת מקורות, באופן הבא:

$$R_x = R_3 = 10(\Omega)$$

$$\bar{U}_S = \bar{I}_1 \cdot R_3 = (0.565\angle 60°) \cdot 10 = 5.656\angle 60°(\text{V})$$

נפתור במילמן:

$$\bar{U}'' = \frac{\dfrac{\bar{U}_S}{R_2 + R_x}}{\dfrac{1}{R_1 + jX_{L_1}} + \dfrac{1}{jX_{L_2}} + \dfrac{1}{-jX_C} + \dfrac{1}{R_2 + R_x}} = \frac{\dfrac{5.656\angle 60°}{15+10}}{\dfrac{1}{12+j20} + \dfrac{1}{j30} + \dfrac{1}{-j50} + \dfrac{1}{15+10}} =$$

$$= 2.837\angle 98.912°(\text{V})$$

**<u>תרומת מקור ה-DC</u>:**

עבור מקור DC הקבל נתק והסלילים קצר. מכיוון שכך, הקצר הנוצר על ידי הסליל $L_2$ גורם לתוצאה של אפס עבור המתח המבוקש. ובניסוח מתמטי:

$$U''' = 0$$

**<u>סיכום התרומות</u>:**

כפי שראינו רק מקורות ה-AC תורמים למתח המבוקש. המתחים הנוצרים על ידי שניהם הם בקוטביות זהה, ולכן יש לחבר בין התרומות. כידוע בהצגת התרומות בסופרפוזיציה יש להציג את המתחים כתלות בזמן. מכאן:

$$u(t)=u'(t)+u''(t)=6.846\sqrt{2}\sin(1000t+7.790°)+2.837\sqrt{2}\sin(2000t+98.912°)(\mathrm{V})$$

**<u>הערה</u>:** אין להציג את התרומות בהצגה פאזורית ולחבר ביניהן לשם קבלת ערך יחיד, שכן מדובר כאן במקורות בעלי תדירויות שונות, ולכן לחיבור מסוג זה לא תהיה שום משמעות פיזיקלית. חיבור התרומות לערך יחיד אפשרי בחישוב ערך ממוצע או ערך יעיל, וכפי שנראה בסעיף הבא.

ב. הביטוי שקיבלנו בסעיף הקודם מורכב משתי תרומות של מקורות סינוס. כידוע הממוצע של אות סינוס הוא אפס, ולכן:

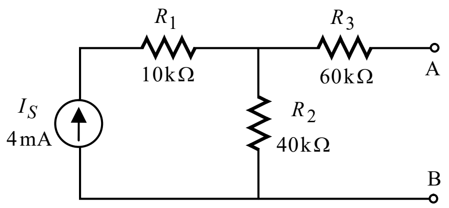
$$U_{\mathrm{av}}=0$$

את הערך היעיל השקול נוכל לקבל בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$U_{\mathrm{rms}}=\sqrt{U_{\mathrm{rms}_1}^2+U_{\mathrm{rms}_2}^2}=\sqrt{6.846^2+2.837^2}=7.410(\mathrm{V})$$

## **שאלה 8**

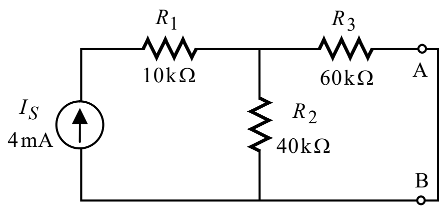
א. מיד לאחר סגירת המפסק הסליל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:




המתח על הסליל הוא המתח בין A ל-B. מסלול מתחים פשוט בין הנקודות מראה שזהו המתח על $R_2$ (הנגד $R_3$ שבמסלול מנותק ולכן המתח שלו אפס). מכאן:

$$U_{L\,(0^+)} = U_{R_2} = I_S \cdot R_2 = 4\text{m} \cdot 40\text{k} = 160(\text{V})$$

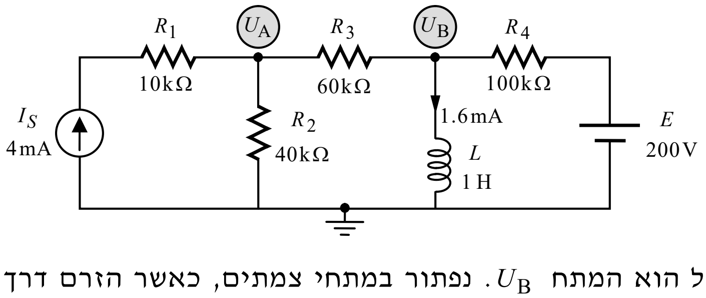
במצב המתמיד הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:




הזרם דרך הסליל הוא הזרם בין A ל-B. זהו הזרם דרך $R_3$. מכאן:

$$I_{L\,(\infty)} = I_{R_3} = \frac{I_S \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{4\text{m} \cdot 40\text{k}}{40\text{k} + 60\text{k}} = 1.6(\text{mA})$$

ב. לסליל יש תכונה שהוא **שומר על רציפות הזרם דרכו**. הלכך, מיד לאחר סגירת המפסק $S_2$, הזרם בסליל יישאר באותו גודל ובאותו כיוון, כפי שהיה רגע לפני סגירת המפסק, כלומר 1.6mA בכיוון מטה (התקבל בסעיף הקודם). נשרטט את המעגל החדש, ונציין על גביו את הידוע לנו:




המתח על הסליל הוא המתח $U_B$. נפתור במתחי צמתים, כאשר הזרם דרך הסליל משמש לנו כזרם נתון במעגל אותו נציב במשוואת צומת B, וכפי שנראה.

**<u>צומת A:</u>**

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A :

**שלב א':** $(A)\ I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד הזרם של מקור הזרם) :

**שלב ב':** $(A)\ -I_S + \frac{U_A - 0}{R_2} + \frac{U_A - U_B}{R_3} = 0$

נסדר את המשוואה שקיבלנו :

**שלב ג':** $(A)\ \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)U_A - \left(\frac{1}{R_3}\right)U_B = I_S$

נציב ערכים :

**שלב ד':** $(A)\ \left(\frac{1}{40k} + \frac{1}{60k}\right)U_A - \left(\frac{1}{60k}\right)U_B = 4m$

**<u>צומת B:</u>**

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B :

**שלב א':** $(B)\ I'_{R_3} + I_L + I_{R_4} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות, **מלבד זרם הסליל שאותו נציב כזרם נתון** :

**שלב ב':** $(B)\ \frac{U_B - U_A}{R_3} + 1.6m + \frac{U_B - E}{R_4} = 0$

נסדר את המשוואה שקיבלנו :

**שלב ג':** $(B) -\left(\frac{1}{R_3}\right)U_A + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_B = \frac{E}{R_4} - 1.6m$

נציב ערכים :

**שלב ד':** $(B) -\left(\frac{1}{60k}\right)U_A + \left(\frac{1}{60k} + \frac{1}{100k}\right)U_B = \frac{200}{100k} - 1.6m$

**<u>לסיכום:</u>**

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים :

$$\begin{cases} (A)\ \left(\frac{1}{40k} + \frac{1}{60k}\right)U_A - \left(\frac{1}{60k}\right)U_B = 4m \\ (B) -\left(\frac{1}{60k}\right)U_A + \left(\frac{1}{60k} + \frac{1}{100k}\right)U_B = \frac{200}{100k} - 1.6m \end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן :

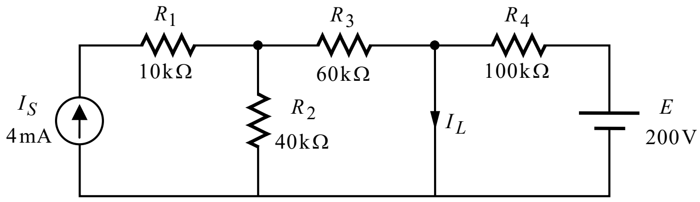
$U_A = 136(V)$

$U_B = 100(V)$

מכאן :

$U_L = U_B = 100(V)$

נעבור לחישוב זרם הסליל במצב המתמיד. במצב זה הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:




נוכל לקבל את זרם הסליל בקלות בעזרת סופרפוזיציה. יש לשים לב שכאשר בוחנים את תרומתו של כל מקור בנפרד, הקצר הקיים במקום הסליל מקצר את חלק המעגל שמהצד השני.

**<u>תרומת מקור הזרם:</u>**

גודל הזרם שמקור זה תורם, זהה למה שחישבנו לעיל סעיף א', שהרי מתקבל אותו מעגל עבור מקור זה:

$$I'_L = I_{R_3} = \frac{I_S \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{4m \cdot 40k}{40k + 60k} = 1.6(mA)$$

**<u>תרומת מקור המתח:</u>**

כאמור הקצר יוצר עבורו מעגל שבו יש רק את מקור המתח ו- $R_4$. מכאן:

$$I''_L = I_{R_4} = \frac{E}{R_4} = \frac{200}{100k} = 2(mA)$$

לשתי תרומות הזרם אותו הכיוון. נחבר בין התרומות ונקבל:

$$I_{L(\infty)} = I'_L + I''_L = 1.6m + 2m = 3.6(mA)$$