פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2022 מועד ב׳

שאלה 1

א. נחשב תחילה את התנגדויות המעגל. הערכים הנקובים של הנורות R_{n} הינם $40\text{V}/160\text{W}$.
נחשב את התנגדותה של כל נורה:

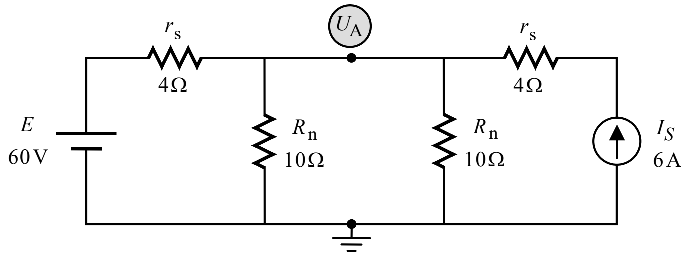
$$P_{\text{n}}=\frac{U_{\text{n}}^{2}}{R_{\text{n}}} \quad \Rightarrow$$

$$R_{\text{n}}=\frac{U_{\text{n}}^{2}}{P_{\text{n}}}=\frac{40^{2}}{160}=10(\Omega)$$

נחשב את ההתנגדות של כל מוליך r_{s}. נתון כי אורך המוליך 200m, שטח החתך שלו 1mm^2, וההתנגדות הסגולית שלו $0.02\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}$. ניעזר בנוסחה לתלות ההתנגדות בתכונות החומר ונקבל:

$$r_{\text{s}}=\frac{\rho\cdot\ell}{A}=\frac{0.02\cdot 200}{1}=4(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל:



נפתור בעזרת משפט מילמן:

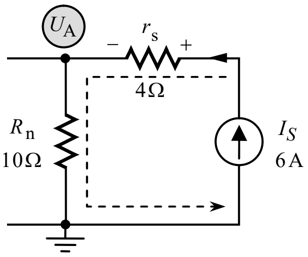
$$U_{\text{A}}=\frac{\frac{E}{r_{\text{s}}}+I_S}{\frac{1}{r_{\text{s}}}+\frac{1}{R_{\text{n}}}+\frac{1}{R_{\text{n}}}}=\frac{\frac{60}{4}+6}{\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}=46.666(\text{V})$$

מתח המקור E גדול מ- U_{A} שקיבלנו. הלכך, הזרם דרך המקור יזרום בכיוון מעלה. נמצא שהזרם יוצא מההדק החיובי של המקור E, ולכן נוכל לקבוע כבר עכשיו שמקור זה הוא **ספק**. נחשב את הזרם ואת ההספק של מקור זה:

$$I_E=\frac{E-U_{\text{A}}}{r_{\text{s}}}=\frac{60-46.666}{4}=3.333(\text{A})$$

$$P_E=E\cdot I_E=60\cdot 3.333=200(\text{W})$$

ב. נחשב את המתח על מקור הזרם בעזרת מסלול מתחים בין הדקיו. נצא מראש החץ, ונעבור דרך r_s ו- R_n הסמוכים אליו. הזרם של r_s הוא הזרם של מקור הזרם. נתאר את מסלול המתחים, ונחשב את המתח וההספק של מקור הזרם:



$$U_{r_s} = I_S \cdot r_s = 6 \cdot 4 = 24(\mathrm{V})$$

$$U_{I_S} = +U_{r_s} + U_A = 24 + 46.666 = 70.666(\mathrm{V})$$

$$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 70.666 \cdot 6 = 424(\mathrm{W})$$

המתח של מקור הזרם יצא חיובי ולכן גם מקור זה **ספק** (נתון זה נצרך לסעיף ד').

ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את ההספק של הנורות. יש לשים לב ש"הערכים הנקובים" של R_n הנתונים בשאלה, אינם הערכים שיתקבלו בפועל על R_n. הם מהווים "נתוני יצרן" בלבד, הנדרשים לפעולה התקינה של R_n. הערכים האמיתיים שיתקבלו תלויים בנתוני המעגל אליו R_n מחובר.
מכל מקום, ההתנגדות R_n שאותה חישבנו היא אכן ההתנגדות בפועל, שהרי נתון זה אינו תלוי במעגל אליו R_n מחובר, אלא בתכונות הפיזיות של R_n.

נחשב את ההספק של כל נורה, ואת ההספק של שתיהן יחד:

$$P_{R_n} = \frac{{U_{R_n}}^2}{R_n} = \frac{{U_A}^2}{R_n} = \frac{46.666^2}{10} = 217.777(\mathrm{W})$$

$$P_{R_{n(T)}} = 2 \cdot P_{R_n} = 2 \cdot 217.777 = 435.555(\mathrm{W})$$

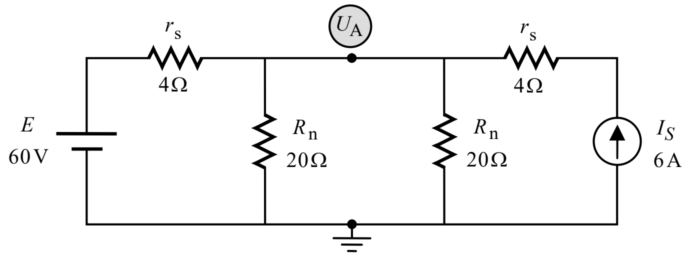
ד. הנצילות היא היחס בין ההספק **המושקע** להספק **המועיל**. ההספק **המושקע** הוא ההספק של כל המקורות המתפקדים כספקים במעגל. ראינו בסעיפים א'-ב' ששני המקורות במקרה זה הם ספקים. ההספק **המועיל** הוא ההספק של הנורות בלבד (ההספק של התנגדויות התילים הוא הספק מבוזבז). מכאן:

$$\eta = \frac{P_{R_{n(T)}}}{P_E + P_{I_S}} \cdot 100\% = \frac{435.555}{200 + 424} \cdot 100\% = 69.800\%$$

ה. ניעזר בנוסחה לתלת ההתנגדות בטמפרטורה, ונחשב את ההתנגדות החדשה של כל נורה:

$$R_{(T)} = R_{T_0}\left[1+\alpha_{T_0}\left(T-T_0\right)\right] = 10\left[1+0.005(220-20)\right] = 20(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל:



נפתור בעזרת משפט מילמן:

$$U_A = \frac{\frac{E}{r_s}+I_S}{\frac{1}{r_s}+\frac{1}{R_n}+\frac{1}{R_n}} = \frac{\frac{60}{4}+6}{\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}} = 60(\text{V})$$

המתח U_A שקיבלנו שווה בדיוק למתח המקור E. הזרם דרך המקור במצב זה הוא אפס, וכן ההספק שלו הוא אפס. לפיכך **מקור זה אינו ספק ואינו צרכן**.

נחשב את הזרם העובר דרך כל נורה (אותו זרם בשתיהן):

$$I_{R_n} = \frac{U_A}{R_n} = \frac{60}{20} = 3(\text{A})$$

שאלה 2

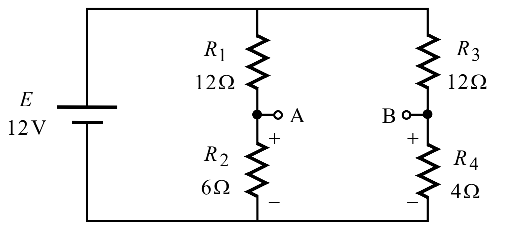
א. לא יזרום זרם ב- R_L במצב של גשר ויטסטון מאוזן. נחשב בעזרת הנוסחה לגשר מאוזן (כפל בהצלבה של נגדי הגשר):

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \quad \Rightarrow$$

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_2} = \frac{12 \cdot 4}{6} = 8(\Omega)$$

ב. **חישוב מתח תבנין:**

ננתק את R_L ונשרטט את המעגל המתקבל:



המתח E_{Th} הוא המתח בין A ל-B. נחשב מתח זה בעזרת מסלול מתחים העובר דרך R_2 ו- R_4. קוטביות מתחי נגדים אלה סומנה מראש על גבי האיור (בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). נחשב את מתחי הנגדים ואת E_{Th}:

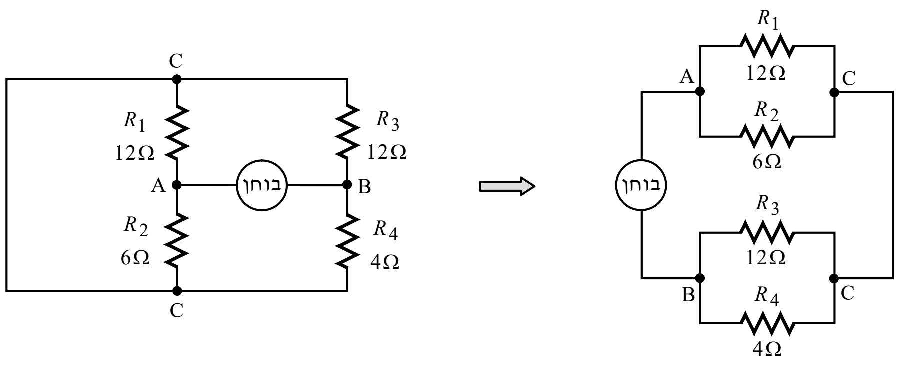
$$U_{R_2} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 6}{12+6} = 4(\text{V})$$

$$U_{R_4} = \frac{E \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{12 \cdot 4}{12+4} = 3(\text{V})$$

$$E_{\text{Th}} = U_{\text{AB}} = +U_{R_2} - U_{R_4} = 4 - 3 = 1(\text{V})$$

חישוב התנגדות תבנין:

נקצר את מקור המתח, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:



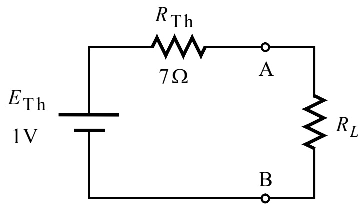
ביאור: בצד שמאל של האיור שרטטנו את המעגל המתקבל לאחר קיצורו של מקור המתח. הקצר הנוצר גורם לקושי מסוים בזיהוי הנכון של צורת החיבור בין הנגדים. במקרים מסוג זה מומלץ לסמן את כל הצמתים באותיות, ולזהות "צמתים זהים". צמתים זהים הם צמתים שביניהם מפריד חוק קצר בלבד. במקרה זה סומן צומת C משני צדדיו של חוט הקצר.

נמצא שהנגדים R_1 ו- R_2 שניהם מתוחים בין A ל-C. כמו כן הנגדים R_3 ו- R_4 שניהם מתוחים בין B ל-C. בצד ימין של האיור שרטטנו את המעגל בצורה מסודרת יותר, תוך

שאנו מקפידים לחבר כל רכיב בין אותם צמתים אליהם היה מחובר במעגל המקורי שבצד שמאל. מכאן:

$$R_{\text{Th}} = R_1 \| R_2 + R_3 \| R_4 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)^{-1} = 7(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנין שקיבלנו:



<u>הערה</u>: הרחבה על הנידון של חישוב התנגדות שקולה עבור מקרים סבוכים ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק במעגלי זרם ישר (ראה שם תחת הנידון של "שיטת הצמתים הזהים").

ג. התנאי להעברת הספק מקסימלי עבור מעגלי DC הוא:

$$R_L = R_{\text{Th}} = 7(\Omega)$$

ד. ניעזר במעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את ההספק של R_L:

$$I_{R_L} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{1}{7+7} = 0.071(\text{A})$$

$$P_{R_L} = {I_{R_L}}^2 \cdot R_L = 0.071^2 \cdot 7 = 0.035(\text{W}) = 35.714(\text{mW})$$

שאלה 3

א. נתון ההספק המרוכב של $\bar{Z}_4$:

$\bar{S}_{Z_4} = 20\angle 30°(\text{VA})$

ניתן לראות במעגל הנתון שהעכבה $\bar{Z}_4$ מחוברת במקביל למקור המתח $\bar{U}_{S_2}$. מכאן :

$\bar{U}_{Z_4} = \bar{U}_{S_2} = 10\angle 60°(\text{V})$

נוכל לחשב את הערך המוחלט של $\bar{Z}_4$ בעזרת הקשר הבא :

$$S_{Z_4} = \frac{{U_{S_2}}^2}{Z_4}$$

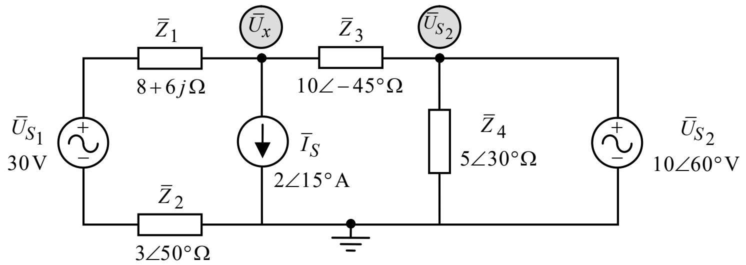
נציין שבמשוואה זו יש להציב ערכים מוחלטים בלבד. מכאן :

$$|Z_4| = \frac{{U_{S_2}}^2}{S_{Z_4}} = \frac{10^2}{20} = 5(\Omega)$$

זווית המופע של $\bar{Z}_4$ היא גם זווית המופע של $\bar{S}_{Z_4}$. מכאן :

$\bar{Z}_4 = 5\angle 30°(\Omega)$

ב.



המתח בצומת העליון הימני הוא המתח $\bar{U}_{S_2}$. מתח זה התקבל על ידי הליכה במסלול מצומת זה, דרך $\bar{U}_{S_2}$, לאדמה. נשאר לנו לחשב את המתח $\bar{U}_x$. נחשב בעזרת מתחי צמתים. נרשום את משוואת הזרמים לצומת :

שלב א': $\bar{I}_{Z_{1-2}} + \bar{I}_\text{X} + \bar{I}_{Z_3} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם בענף של מקור הזרם) :

שלב ב': $$\frac{\bar{U}_x - \bar{U}_{S_1}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \bar{I}_S + \frac{\bar{U}_x - \bar{U}_{S_2}}{\bar{Z}_3} = 0$$

נסדר את המשוואה :

שלב ג': $$\left(\frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right)\bar{U}_x = \frac{\bar{U}_{S_1}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \frac{\bar{U}_{S_2}}{\bar{Z}_3} - \bar{I}_S$$

נציב ערכים :

שלב ד': $$\left(\frac{1}{8+6j+3\angle 50°} + \frac{1}{10\angle -45°}\right)\bar{U}_x = \frac{30}{8+6j+3\angle 50°} + \frac{10\angle 60°}{10\angle -45°} - 2\angle 15°$$

פתרון המשוואה נותן :

$\bar{U}_x = 8.481\angle -120.865(\text{V})$

נציג כאן בקצרה את השיטה המופיעה בספר "תורת החשמל" שבהוצאתנו, לקביעת מקור כספק או כצרכן, במעגלי זרם חילופין:
בשלב ראשון נבחן אם המתח והזרם של המקור הם באותו הכיוון. אם הם בכיוונים מנוגדים, נחשב את ההספקים כרגיל בעזרת הנוסחה $\bar{S}=\bar{U}\cdot\bar{I}^*$. אם הם באותו הכיוון, נציב סימן שלילי בשעת חישוב ההספק באופן הבא $\bar{S}=-\bar{U}\cdot\bar{I}^*$.
בשלב שני נתבונן על סימן ההספק P שקיבלנו – אם הוא חיובי המקור צרכן, ואם הוא שלילי המקור ספק (הרחבה נוספת על שיטה זו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק בהספק ואנרגיה במעגלי זרם חילופין).

נציין שבשאלה זו אנו נחשב את המתחים והזרמים באופן כזה, כך שתמיד המתח והזרם יהיו באותו כיוון, מה שאומר שנציב סימן שלילי בחישוב ההספק (ב-AC ניתן להניח כיוון כרצוננו, אם אין אילוץ אחר בשאלה). לגבי מקור הזרם הדבר אומר שנחשב את המתח שלו במסלול היוצא מראש החץ לבסיסו, ולא להיפך. זהו למעשה המתח ההופכי ל- $\bar{U}_x$ שמצאנו. מכאן:

$$\bar{U}_{I_S}=-\bar{U}_x=-(8.481\angle-120.865)=8.481\angle59.134°(\mathrm{V})$$

נחשב את ההספק של מקור זה:

$$\bar{S}_{I_S}=-\bar{U}_{I_S}\cdot\bar{I}_S^{\,*}=-(8.481\angle59.134°)(2\angle-15)=-12.174-11.812j(\mathrm{VA})$$

קיבלנו P שלילי ולכן מקור הזרם **ספק**. נרשום את גודל ההספק הפעיל שקיבלנו:

$$P_{I_S}=12.174(\mathrm{W})$$

ג. נחשב את הזרם העובר דרך $\bar{U}_{S_1}$:

$$\bar{I}_{U_{S_1}}=\frac{\bar{U}_{S_1}-\bar{U}_x}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}=\frac{30-8.481\angle-120.865}{8+6j+3\angle50°}=2.713\angle-27.922°(\mathrm{A})$$

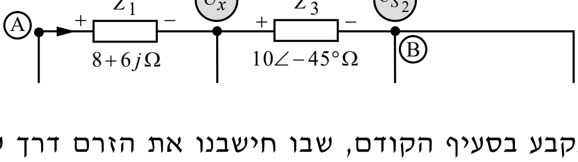
נציין שבכוונה בחרנו לחסר $\bar{U}_{S_1}-\bar{U}_x$ ולא להיפך. חיסור זה "מתאים" לזרם דרך המקור בכיוון מעלה. נמצא שהמתח והזרם של המקור באותו הכיוון, ולכן יש להציב סימן שלילי בחישוב ההספק. מכאן:

$$\bar{S}_{U_{S_1}}=-\bar{U}_{S_1}\cdot\bar{I}_{U_{S_1}}^{\,*}=-(30)(2.713\angle+27.922°)=-71.933-38.123j(\mathrm{VA})$$

קיבלנו P שלילי ולכן המקור $\bar{U}_{S_1}$ **ספק**. נרשום את גודל ההספק הפעיל שקיבלנו:

$$P_{U_{S_1}}=71.933(\mathrm{W})$$

ד. נחשב בעזרת מסלול מתחים בין A ל-B. נשרטט את קטע המעגל הכולל את המסלול שבחרנו:



כיוון הזרם דרך $\bar{Z}_1$ נקבע בסעיף הקודם, שבו חישבנו את הזרם דרך ענף זה. מכך נגזרה קוטביות המתח על עכבה זו. קוטביות המתח על $\bar{Z}_3$ נקבעה כך באופן שרירותי. קביעה זו מתאימה לחיסור $\bar{U}_x-\bar{U}_{S_2}$ (ולא להיפך).

נחשב את מתחי העכבות ואת המתח המבוקש:

$$\bar{U}_{Z_1}=\bar{I}_{U_{S_1}}\cdot\bar{Z}_1=(2.713\angle-27.922)(8+6j)=27.137\angle 8.947^\circ(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_3}=\bar{U}_x-\bar{U}_{S_2}=(8.481\angle-120.865)-(10\angle 60^\circ)=18.481\angle-120.397^\circ(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{\mathrm{AB}}=+\bar{U}_{Z_1}+\bar{U}_{Z_3}=27.137\angle 8.947^\circ+18.481\angle-120.397^\circ=21.025\angle-33.878^\circ(\mathrm{V})$$

שאלה 4

א. מקור המתח נתון על ידי:

$$u(t)=100\cdot\sqrt{2}\sin\left(1000t+\frac{\pi}{6}\right)(\text{V})$$

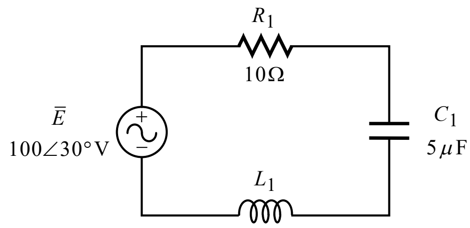
הזווית של מקור המתח נתונה ברדיאנים (כך עולה מאופן ההצגה שלה). כידוע, זווית של π ברדיאנים, אקוויוולנטית ל- 180 מעלות. ניעזר בקשר זה ונמיר את הזווית הנתונה למעלות:

$$\phi=\frac{\pi}{6}=\frac{180}{6}=30^\circ$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (הצגה פאזורית):

$$\bar{E}=\frac{100\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ=100\angle 30^\circ(\text{V})$$

נשרטט את המעגל המתקבל במצב של מפסק פתוח:



נתון שבמצב זה מתקבל זרם מרבי. זרם מרבי יתקבל במצב של תהודה. תדירות המקור נתונה בביטוי המקור לעיל. נחשב את L_1 בעזרת הנוסחה לתדר תהודה במעגל טורי:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}\quad\Rightarrow$$

$$L_1=\frac{1}{\omega_0^2\,C_1}=\frac{1}{1000^2\cdot 5\times 10^{-6}}=0.2(\text{H})$$

נחשב את הזרם במעגל. כידוע בתהודה טורית הסליל והקבל שקולים לקֶצֶר. מכאן:

$$\bar{I}=\frac{\bar{E}}{R_1}=\frac{100\angle 30^\circ}{10}=10\angle 30^\circ(\text{A})$$

ב. רוחב הסרט (או רוחב הפס) עבור מעגל תהודה טורי, נתון על ידי:

$$BW=\frac{R_1}{2\pi L_1}=\frac{10}{2\pi\cdot 0.2}=7.957(\text{Hz})$$

תדירויות מחצית ההספק עבור מעגל תהודה טורי, נתונות על ידי:

$$\omega_1=-\left(\frac{R_1}{2L_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{R_1}{2L_1}\right)^2+\omega_0^2}=-\left(\frac{10}{2\cdot 0.2}\right)+\sqrt{\left(\frac{10}{2\cdot 0.2}\right)^2+1000^2}=975.312\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

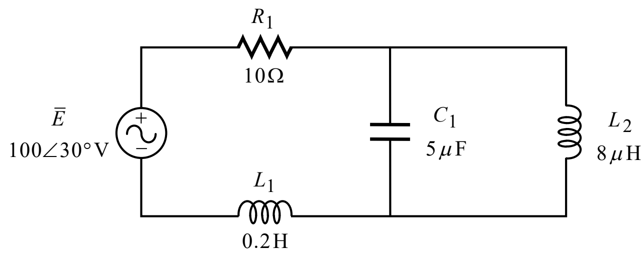
$$\omega_2=+\left(\frac{R_1}{2L_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{R_1}{2L_1}\right)^2+\omega_0^2}=+\left(\frac{10}{2\cdot 0.2}\right)+\sqrt{\left(\frac{10}{2\cdot 0.2}\right)^2+1000^2}=1025.312\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

נוכל לקבל את תדרי מחצית ההספק ביחידת מדידה Hz, בעזרת הקשרים הבאים:

$$f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{975.312}{2\pi}=155.225(\text{Hz})$$

$$f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}=\frac{1025.312}{2\pi}=163.183(\text{Hz})$$

ג.



במעגל הנתון, זרם בעוצמה מזערית יתקבל עבור תהודה מקבילית בין L_2 ו- C_1. כידוע, בתהודה מסוג זה הסליל והקבל שקולים לנֶתֶק. במעגל זה כתוצאה מהנתק לא יהיה מעגל סגור, והזרם במעגל יהיה אפס. תדירות התהודה עבור מקרה זה נתונה על ידי:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_2C_1}}=\frac{1}{\sqrt{8\times10^{-6}\cdot5\times10^{-6}}}=158113.883\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{158113.883}{2\pi}=25164.606(\text{Hz})$$

ד. כאמור בסעיף הקודם, במצב של תהודה מקבילית הזרם במעגל הוא:

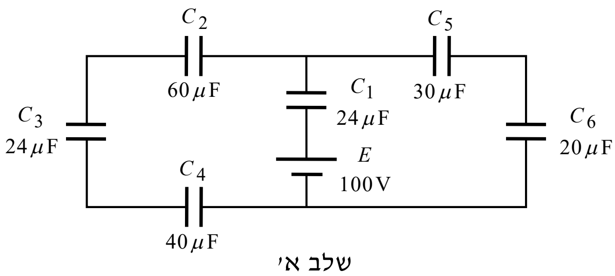
$\bar{I}=0$

מכיוון שאין זרם במעגל, המתח על R_1 ו- L_1 הוא אפס. מכיוון שכך, מסלול מתחים סביב הדקי הקבל נותן:

$\bar{U}_{C_1}=\bar{E}=100\angle30°(\text{V})$

שאלה 5

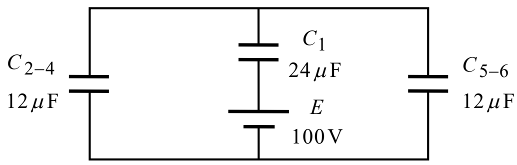
א.



שלב א'

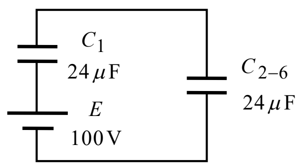
$$C_{2-4}=\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{60\mu}+\frac{1}{24\mu}+\frac{1}{40\mu}\right)^{-1}=12(\mu\text{F})$$

$$C_{5-6}=\left(\frac{1}{C_5}+\frac{1}{C_6}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{30\mu}+\frac{1}{20\mu}\right)^{-1}=12(\mu\text{F})$$



שלב ב'

$$C_{2-6}=C_{2-4}+C_{5-6}=12\mu+12\mu=24(\mu\text{F})$$



שלב ג'

$$C_{\text{T}}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{2-6}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{24\mu}+\frac{1}{24\mu}\right)^{-1}=12(\mu\text{F})$$

ב. נחשב תחילה את המטען של כל קבל:

$$Q_{\text{T}}=E\cdot C_{\text{T}}=100\cdot 12\mu=1200(\mu\text{C})$$

$$Q_{C_1}=Q_{\text{T}}=1200(\mu\text{C})$$

נתבונן על שלב ב' לעיל. המטען השקול שמצאנו מתחלק בין שני ענפים במקביל. מכיוון שלשני הענפים קיבול זהה, המטען מתחלק ביניהם בשווה:

$$Q_{C_{2-4}}=Q_{C_{5-6}}=\frac{Q_{\text{T}}}{2}=\frac{1200\mu}{2}=600\ (\mu\text{C})$$

נתבונן כעת על שלב א' לעיל. על קבלים בטור ישנו מטען זהה. מכאן:

$$Q_{C_2}=Q_{C_3}=Q_{C_4}=Q_{C_{2-4}}=600\ (\mu\text{C})$$

$$Q_{C_5}=Q_{C_6}=Q_{C_{5-6}}=600\ (\mu\text{C})$$

כעת ניעזר בערך המטען שמצאנו על כל אחד מהקבלים, ונחשב את המתח הנופל על כל אחד מהם:

$$U_{C_1}=\frac{Q_{C_1}}{C_1}=\frac{1200\mu}{24\mu}=50(\text{V})$$

$$U_{C_2}=\frac{Q_{C_2}}{C_2}=\frac{600\mu}{60\mu}=10(\text{V})$$

$$U_{C_3}=\frac{Q_{C_3}}{C_3}=\frac{600\mu}{24\mu}=25(\text{V})$$

$$U_{C_4}=\frac{Q_{C_4}}{C_4}=\frac{600\mu}{40\mu}=15(\text{V})$$

$$U_{C_5}=\frac{Q_{C_5}}{C_5}=\frac{600\mu}{30\mu}=20(\text{V})$$

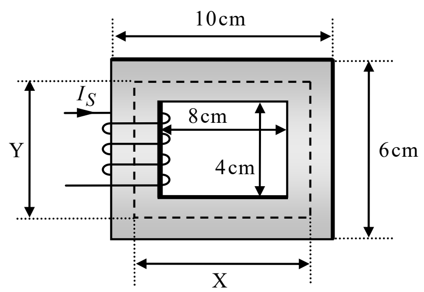
$$U_{C_6}=\frac{Q_{C_6}}{C_6}=\frac{600\mu}{20\mu}=30(\text{V})$$

ג.

$$W_{\text{T}}=\frac{C_{\text{T}}\cdot E^2}{2}=\frac{12\mu\cdot 100^2}{2}=0.06(\text{J})$$

שאלה 6

א.



עלינו לחשב את האורך הממוצע של הליבה שסומן בקו מקווקו. על פי המידות הנתונות, קו האורך שסומן ב-X הוא הממוצע בין 10cm ל- 8cm :

$$X = \frac{10+8}{2} = 9(\mathrm{cm})$$

קו הרוחב שסומן ב-Y הוא הממוצע בין 6cm ל- 4cm :

$$Y = \frac{6+4}{2} = 5(\mathrm{cm})$$

נחשב את האורך הממוצע של הליבה:

$$\ell = (X+Y)\times 2 = (9\mathrm{cm}+5\mathrm{cm})\times 2 = 28(\mathrm{cm}) = 0.28(\mathrm{m})$$

נרכז את שאר הנתונים:

$$A = 40\left(\mathrm{mm}^2\right) = 40\times 10^{-6}\left(\mathrm{m}^2\right)$$

$$\phi = 200(\mu\mathrm{Wb})$$

$$N = 100$$

$$L = 5(\mathrm{mH})$$

את המיאון של הליבה נוכל לחשב בעזרת הקשר הבא:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad \Rightarrow$$

$$R_m = \frac{N^2}{L} = \frac{100^2}{5\times 10^{-3}} = 2\times 10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

ב. את הזרם בסליל נוכל לחשב בעזרת הקשר הבא:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_m} = \frac{N\cdot I_S}{R_m} \quad \Rightarrow$$

$$I_S = \frac{\phi\cdot R_m}{N} = \frac{200\times 10^{-6}\cdot 2\times 10^6}{100} = 4(\mathrm{A})$$

ג. את החדירות המגנטית היחסית μ_r נוכל לחשב בעזרת הקשר הבא:

$$R_m = \frac{\ell}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} \quad \Rightarrow$$

$$\mu_r = \frac{\ell}{\mu_0 \cdot A \cdot R_m} = \frac{0.28}{4\pi 10^{-7} \cdot 40\times 10^{-6} \cdot 2\times 10^{6}} = 2785.211$$

ד. נציין כי סעיף זה עוסק בחשמל ולא במגנטיות. מקור הזרם והתנגדות הסליל מרכיבים שניהם מעגל טורי פשוט. נתון בסעיף זה $P_{I_S} = 4\,\mathrm{W}$. את I_S חישבנו לעיל סעיף ב'. מכאן:

$$P_{I_S} = {I_S}^2 \cdot R \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{P_{I_S}}{{I_S}^2} = \frac{16}{4^2} = 1(\Omega)$$

ה. בסעיף זה נתון $M = 10\,\mathrm{mH}$, $k = 1$. נוכל לחשב את השראות הסליל השני בעזרת הקשר הבא:

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad \Rightarrow$$

$$L_2 = \frac{M^2}{k^2 \cdot L_1} = \frac{\left(10\times 10^{-3}\right)^2}{1^2 \cdot 5\times 10^{-3}} = 0.02(\mathrm{H}) = 20(\mathrm{mH})$$

נחשב את מספר הליפופים של L_2:

$$L_2 = \frac{{N_2}^2}{R_m} \quad \Rightarrow$$

$$N_2 = \sqrt{L_2 \cdot R_m} = \sqrt{20\times 10^{-3} \cdot 2\times 10^{6}} = 200$$

שאלה 7

א. בשאלה זו פועלים מקורות מסוגים שונים – מקור DC, ושני מקורות AC בעלי תדרים שונים. לפיכך יש לפתור בסופרפוזיציה, ולבחון את תרומתו של כל מקור בנפרד. שני מקורות ה-AC נתונים על ידי:

$$v_2(t) = 8\sqrt{2}\sin(1000t + 60°)(\mathrm{V})$$

$$v_3(t) = 15\sqrt{2}\sin(2000t + 170°)(\mathrm{V})$$

נציג את שני המקורות בהצגה פאזורית (מהלך זה לכאורה מיותר, שהרי לבסוף נצטרך לחזור ולהציג את התוצאות כתלות בזמן. יחד עם זאת במקרה זה נוח יהיה לעבוד עם ההצגה הפאזורית, זאת על מנת לעבוד עם מספרים שלמים):

$$\bar{U}_2 = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 60° = 8\angle 60°(\mathrm{V})$$

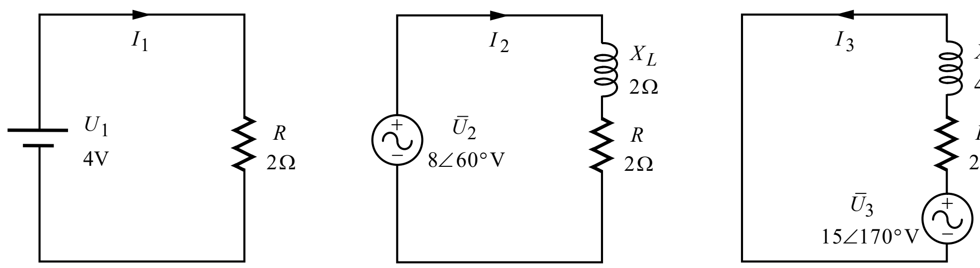
$$\bar{U}_3 = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 170° = 15\angle 170°(\mathrm{V})$$

נחשב את היגב הסליל המתקבל עבור כל אחת מתדירויות מקורות ה-AC:

$$X_{L(2)} = \omega_{(2)} \cdot L = 1000 \cdot 2\times 10^{-3} = 2(\Omega)$$

$$X_{L(3)} = \omega_{(3)} \cdot L = 2000 \cdot 2\times 10^{-3} = 4(\Omega)$$

נשרטט כעת את המעגל המתקבל עבור כל אחד ממקורות האנרגיה. בכל מעגל נשאיר מקור אחד, ואת השאר נקצר. נזכיר שעבור מקור ה-DC הסליל קצר, ועבור כל אחד ממקורות ה-AC יש לסליל את ההיגב שחישבנו לכל מקור. מכאן:



תרומת U_1:

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{4}{2} = 2(\mathrm{A})$$

תרומת $\bar{U}_2$:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{R + jX_L} = \frac{8\angle 60°}{2+2j} = 2.828\angle 15°(\mathrm{A})$$

תרומת $\bar{U}_3$:

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{R + jX_L} = \frac{15\angle 170°}{2+4j} = 3.354\angle 106.565°(\mathrm{A})$$

נסכם את התרומות. המקורות U_1 ו- $\bar{U}_2$ פועלים בכיוון זהה, ואילו $\bar{U}_3$ פועל בכיוון מנוגד. הלכך התרומה של $\bar{U}_3$ תופיע בסימן שלילי. כמו כן נזכיר שבהצגת התוצאה בסופרפוזיציה, יש להציג את שני זרמי ה-AC כתלות בזמן. מכאן:

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)-i_3(t)=2+2.828\sqrt{2}\sin(1000t+15°)-3.354\sqrt{2}\sin(2000t+106.565°)(\text{A})$$

ב. את הערך היעיל של הזרם נוכל לקבל בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$I_{\text{rms}}=\sqrt{I_{\text{rms}_1}^2+I_{\text{rms}_2}^2+I_{\text{rms}_3}^2}=\sqrt{2^2+2.828^2+3.354^2}=4.821(\text{A})$$

<u>הערה</u>: חיברנו בנוסחה האחרונה בין כל הזרמים, זאת למרות שכאמור המקור $\bar{U}_3$ פועל במגמה הפוכה. נרשום בקצרה את הטעם לכך: הזרם שמפיק $\bar{U}_3$ הוא זרם סינוסי, הנע תמיד בין ערכים חיוביים לשליליים. כלומר אין לו כיוון יחיד כמו ב-DC. סימן שלילי לפני אות סינוס, פירושו שאות זה פועל במגמה הפוכה. בסינוס דבר זה מתבטא בזווית – הזווית שלו הופכית ב- $180°$. כלומר במקום לחסר את התרומה של $\bar{U}_3$, יכולנו למעשה לחבר תרומה זו, כאשר הזווית שלה הפוכה ב- $180°$. שתי האפשרויות נותנות אותה תוצאה. העולה מדברים אלה הוא, שבאות סינוס הסימן השלילי משפיע רק על הזווית, דבר שממילא לא בא לידי ביטוי בחישוב הערך היעיל של אות סינוס, ולכן יש לחבר כרגיל.

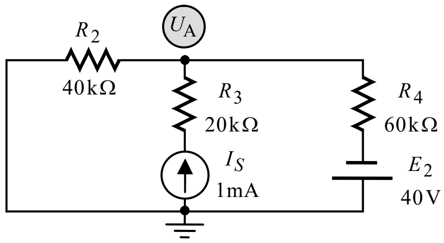
ג. את ההספק **הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת הערך **היעיל**:

$$P_R=I_{\text{rms}}^2\cdot R=4.821^2\cdot 2=46.5(\text{W})$$

שאלה 8

א. **מצב התחלתי:**

בסעיף זה רק S_2 נסגר. ברגע ההתחלתי הקבל שקול לקֶצֶר. נשרטט את המעגל המתקבל:



שים לב! המקור E_2 נתון בסימן שלילי, מה שאומר שכיוונו הפוך למשורטט בשאלה (ייתכן וזו טעות בשאלה. מכל מקום פתרנו על סמך ההנחה שאין זו טעות).

נפתור בעזרת משפט מילמן:

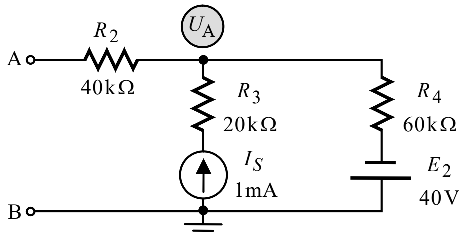
$$U_A = \frac{I_S - \frac{E_2}{R_4}}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}} = \frac{1\times10^{-3} - \frac{40}{60\text{k}}}{\frac{1}{40\text{k}}+\frac{1}{60\text{k}}} = 8(\text{V})$$

הזרם העובר דרך הקבל הוא הזרם של R_2. מכאן:

$$I_{C(0^+)} = I_{R_2} = \frac{U_A}{R_2} = \frac{8}{40\text{k}} = 0.2(\text{mA})$$

מצב מתמיד:

במצב המתמיד הקבל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על הדקי הקבל במצב המתמיד הוא המתח בין A ל-B. מכיוון שעל R_2 אין מתח במצב זה, המתח בין A ל-B הוא המתח U_A. נוכל לחשב מתח זה בקלות בעזרת משפט מילמן:

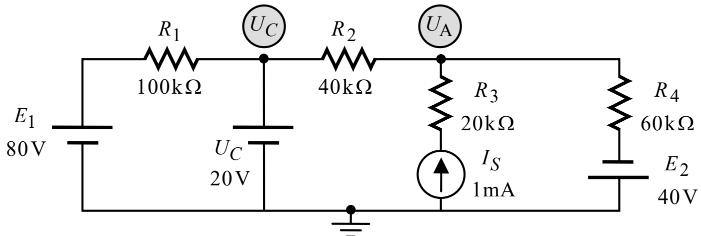
$$U_{C(\infty)} = U_A = \frac{I_S - \frac{E_2}{R_4}}{\frac{1}{R_4}} = \frac{1\times10^{-3} - \frac{40}{60\text{k}}}{\frac{1}{60\text{k}}} = 20(\text{V})$$

נחשב את המטען האגור בקבל במצב המתמיד:

$$Q_{C(\infty)} = C\cdot U_{C(\infty)} = \left(0.1\times10^{-6}\right)\cdot 20 = 2(\mu\text{C})$$

ב. **<u>מצב התחלתי:</u>**

הקבל שומר על רציפות המתח דרכו. הדבר אומר, שמיד לאחר סגירת S_1, המתח על הקבל הוא עדיין 20V, ובקוטביות שהייתה לפני סגירת המפסק. הוא משמש כסוג של מקור מתח שערכו משתנה. נשרטט את המעגל המתקבל:



נחשב את U_A בעזרת שיטת מתחי צמתים (משפט מילמן אינו מיועד למעגל עם יותר מצומת אחד). נרשום את משוואת הזרמים לצומת:

שלב א׳:

$$I_{R_2}+I_{R_3}+I_{R_4}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם בענף של מקור הזרם):

שלב ב׳:

$$\frac{U_A-U_C}{R_2}-I_S+\frac{U_A-(-E_2)}{R_4}=0$$

נסדר את המשוואה:

שלב ג׳:

$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)U_A=\frac{U_C}{R_2}+I_S-\frac{E_2}{R_4}$$

נציב ערכים:

שלב ד׳:

$$\left(\frac{1}{40\text{k}}+\frac{1}{60\text{k}}\right)U_A=\frac{20}{40\text{k}}+1\times10^{-3}-\frac{40}{60\text{k}}$$

פתרון המשוואה נותן:

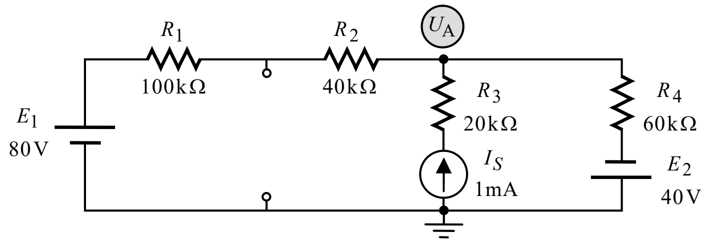
$$U_A=20(\text{V})$$

קיבלנו ש- U_A שווה בדיוק ל- U_C. הלכך הזרם דרך R_2 הוא אפס. נמצא במקרה זה, שהזרם של R_1 ממשיך כולו אל הקבל. מכאן:

$$I_C=I_{R_1}=\frac{E_1-U_C}{R_1}=\frac{80-20}{100\text{k}}=0.6(\text{mA})$$

<u>מצב מתמיד:</u>

במצב המתמיד הקבל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על הקבל הוא המתח בין ההדקים שנותרו לאחר ניתוקו. נחשב תחילה את U_A בעזרת משפט מילמן:

$$U_A = \frac{\frac{E_1}{R_1+R_2}+I_S-\frac{E_2}{R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{80}{100k+40k}+1\times10^{-3}-\frac{40}{60k}}{\frac{1}{100k+40k}+\frac{1}{60k}} = 38(V)$$

את המתח על הקבל נוכל לחשב בעזרת מסלול מתחים בין הדקיו, העובר דרך R_1 ו- E_1. נחשב את המתח הנופל על R_1:

$$I_{R_1} = \frac{E_1-U_A}{R_1+R_2} = \frac{80-38}{100k+40k} = 0.3(mA)$$

$$U_{R_1} = I_{R_1}\cdot R_1 = 0.3\times10^{-3}\cdot100\times10^{3} = 30(V)$$

המתח E_1 גדול מ- U_A ולכן הזרם דרך R_1 הוא בכיוון ימין. נמצא שההדק השמאלי של נגד זה מקבל סימן חיובי (בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). מכאן:

$$U_C = -U_{R_1}+E_1 = -30+80 = 50(V)$$

נחשב את האנרגיה בקבל במצב המתמיד:

$$W_C = \frac{C\cdot U_C{}^2}{2} = \frac{0.1\times10^{-6}\cdot50}{2} = 125(\mu J)$$