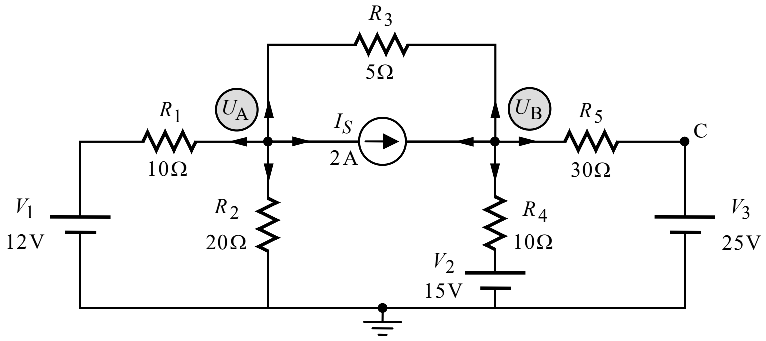
פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2023 מועד ב׳

שאלה 1

א.



נפתור במתח צמתים. הנחנו כתמיד שכל הזרמים יוצאים מכל צומת וצומת. נציין שנקודה C איננה צומת. הציון שלה על גבי המעגל יבוא לידי ביטוי בסעיף ג׳. נרשום את משוואות הצמתים.

<u>צומת A</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A :

שלב א׳: $$I_{R_1}+I_{R_2}+I_S+I_{R_3}=0 \quad (A)$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם) :

שלב ב׳: $$\frac{U_A-V_1}{R_1}+\frac{U_A-0}{R_2}+I_S+\frac{U_A-U_B}{R_3}=0 \quad (A)$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו :

שלב ג׳: $$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_A-\left(\frac{1}{R_3}\right)U_B=\frac{V_1}{R_1}-I_S \quad (A)$$

נציב ערכים :

שלב ד׳: $$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)U_A-\left(\frac{1}{5}\right)U_B=\frac{12}{10}-2 \quad (A)$$

<u>צומת B</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B :

שלב א׳: $$I'_{R_3}-I_S+I_{R_4}+I_{R_5}=0 \quad (B)$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם) :

שלב ב׳: $$\frac{U_B-U_A}{R_3}-I_S+\frac{U_B-V_2}{R_4}+\frac{U_B-V_3}{R_5}=0 \quad (B)$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו :

שלב ג׳: $$-\left(\frac{1}{R_3}\right)U_A+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_B=\frac{V_2}{R_4}+\frac{V_3}{R_5}+I_S \quad (B)$$

נציב ערכים:

שלב ד׳:

$$(\mathrm{B})\ -\left(\frac{1}{5}\right)U_{\mathrm{A}}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)U_{\mathrm{B}}=\frac{15}{10}+\frac{25}{30}+2$$

נסכם. קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}(\mathrm{A})\ \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)U_{\mathrm{A}}-\left(\frac{1}{5}\right)U_{\mathrm{B}}=\frac{12}{10}-2\\[2ex](\mathrm{B})\ -\left(\frac{1}{5}\right)U_{\mathrm{A}}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)U_{\mathrm{B}}=\frac{15}{10}+\frac{25}{30}+2\end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן:

$$U_{\mathrm{A}}=7.826(\mathrm{V})$$

$$U_{\mathrm{B}}=17.695(\mathrm{V})$$

נחשב את המתח הנופל על מקור הזרם ואת ההספק שלו:

$$U_{I_S}=U_{\mathrm{B}}-U_{\mathrm{A}}=17.695-7.826=9.869(\mathrm{V})$$

$$P_{I_S}=U_{I_S}\cdot I_S=9.869\cdot 2=19.739(\mathrm{W})$$

ב. נחשב את הזרם העובר דרך V_2. זהו הזרם העובר דרך R_4. ניעזר בביטוי הזרם שקיבלנו עבור נגד זה לעיל (בשלב ב׳ של צומת B):

$$I_{V_2}=I_{R_4}=\frac{U_{\mathrm{B}}-V_2}{R_4}=\frac{17.695-15}{10}=0.269(\mathrm{A})$$

קיבלנו תוצאה חיובית. הדבר אומר שכיוון הזרם בענף זה הינו כפי ההנחה ההתחלתית – יוצא מצומת B. נמצא שהזרם נכנס להדק החיובי של V_2, ולכן נוכל לקבוע כבר עכשיו שמקור זה **צרכן**. נחשב את ההספק שלו:

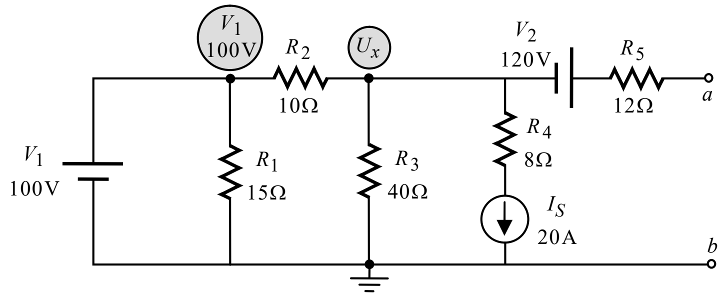
$$P_{V_2}=V_2\cdot I_{V_2}=15\cdot 0.269=4.043(\mathrm{W})$$

ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את המתח בין C ל-A. נחשב בעזרת מסלול מתחים בין שתי נקודות אלו. במקרה זה יהיה הכי נוח לחשב בעזרת המסלול היוצא מנקודה C, עובר דרך V_3 ו- R_2, ומסתיים בנקודה A. המתח על R_2 הוא המתח U_{A} שמצאנו (מכיוון שבאים אל R_2 מההדק התחתון, יש לקחת מתח זה בסימן שלילי). מכאן:

$$U_{\mathrm{CA}}=+V_3-U_{\mathrm{A}}=25-7.826=17.173(\mathrm{V})$$

שאלה 2

א. **חישוב מתח תוונין:**



המתח בצומת שמעל R_2 התקבל על ידי הליכה במסלול מתחים מצומת זה, דרך V_1, לאדמה. נחשב את המתח U_x בעזרת שיטת מתחי הצמתים. נרשום את משוואת הזרמים לצומת:

שלב א': $I_{R_2} + I_{R_3} + I_S = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם):

שלב ב': $\frac{U_x - V_1}{R_2} + \frac{U_x - 0}{R_3} + I_S = 0$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג': $\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U_x = \frac{V_1}{R_2} - I_S$

נציין כי במקרה זה בו יש נעלם אחד, יכולנו להציב ערכים ולפתור כבר בשלב ב'. מכל מקום לא נמנענו מלסדר את המשוואה, זאת על מנת לשמור על דרך עבודה סדורה. מה גם שהדבר תורם לבידוד הנעלם U_x. נציב ערכים:

שלב ד': $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\right) U_x = \frac{100}{10} - 20$

פתרון המשוואה נותן:

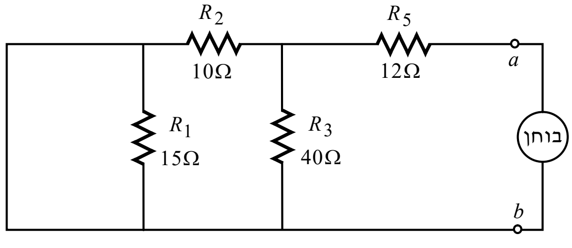
$$U_x = -80(\mathrm{V})$$

נחשב את E_{Th}. זהו המתח בין הנקודות a ו-b. נלך במסלול מתחים בין שתי נקודות אלו. יש לשים לב שהנגד R_5 מנותק, ולכן המתח עליו הוא אפס. מכאן:

$$E_{\mathrm{Th}} = U_{ab} = +V_2 + U_x = 120 - 80 = 40(\mathrm{V})$$

חישוב התנגדות תוונין:

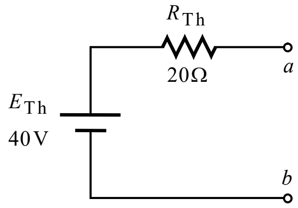
נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחן בין a ו-b, ונשרטט את המעגל המתקבל:



יש לשים לב שקיצורו של מקור המתח V_1 גורר את קיצורו של R_1. מכאן:

$$R_{\text{Th}} = R_2 \parallel R_3 + R_5 = \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{40}\right)^{-1} + 12 = 20(\Omega)$$

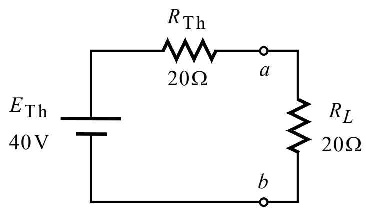
נשרטט את המעגל תבנין שקיבלנו כמתבקש בשאלה:



ב. התנאי להעברת הספק מרבי עבור מעגלי DC הוא:

$$R_L = R_{\text{Th}} = 20(\Omega)$$

ג. נחבר את R_L למעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את הזרם ואת ההספק שלו:

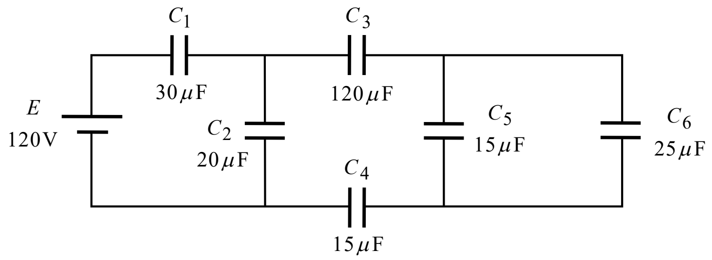


$$I_{R_L} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{40}{20+20} = 1(\text{A})$$

$$P_{R_L} = I_{R_L}{}^2 \cdot R_L = 1^2 \cdot 20 = 20(\text{W})$$

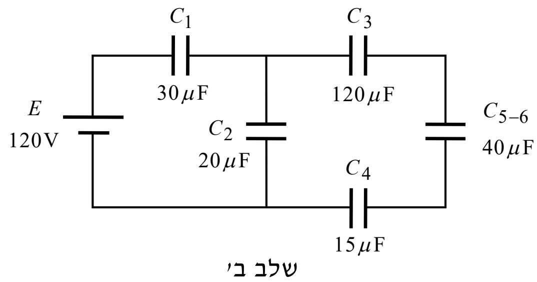
שאלה 3

א. "נקפל" את המעגל אל עבר מקור המתח. נשרטט כמה שלבים חיוניים, אשר ישמשו אותנו גם בסעיף הבא:



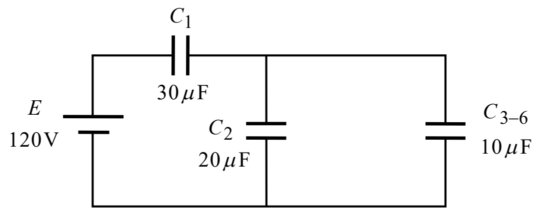
שלב א'

$$C_{5-6} = C_5 + C_6 = 15\mu + 25\mu = 40(\mu F)$$



שלב ב'

$$C_{3-6} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{5-6}} + \frac{1}{C_4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{120\mu} + \frac{1}{40\mu} + \frac{1}{15\mu}\right)^{-1} = 10(\mu F)$$



שלב ג'

$$C_{2-6} = C_2 + C_{3-6} = 20\mu + 10\mu = 30(\mu F)$$

$$C_T = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2-6}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{30\mu} + \frac{1}{30\mu}\right)^{-1} = 15(\mu F)$$

ב. נחשב תחילה את המטען שבכל קבל (בדומה לחישוב זרם בנגדים במעגל מעורב). נפתח בחישוב המטען הכולל, שזהו גם המטען של C_1:

$$Q_{C_1} = Q_T = E \cdot C_T = 120 \cdot 15\mu = 1800(\mu C)$$

ניעזר בשרטוט של שלב ג' לעיל, ונחשב את המטען של C_2 בעזרת כלל מחלק המטען:

$$Q_{C_2} = \frac{Q_T \cdot C_2}{C_2 + C_{3-6}} = \frac{1800\mu \cdot 20\mu}{20\mu + 10\mu} = 1200(\mu C)$$

$$Q_{C_{3-6}} = Q_T - Q_{C_2} = 1800\mu - 1200\mu = 600(\mu C)$$

מהתבוננות בשלב ב' לעיל עולה, כי המטען $Q_{C_{3-6}}$ שמצאנו, הוא המטען של C_3 ו- C_4.
מכאן:

$$Q_{C_3}=Q_{C_4}=Q_{C_{3-6}}=600(\mu\text{C})$$

ניעזר בשרטוט של שלב א' לעיל, ונחשב את המטען של C_5 בעזרת כלל מחלק המטען:

$$Q_{C_5}=\frac{Q_{3-6}\cdot C_5}{C_5+C_6}=\frac{600\mu\cdot 15\mu}{15\mu+25\mu}=225(\mu\text{C})$$

$$Q_{C_6}=Q_{3-6}-Q_{C_5}=600\mu-225\mu=375(\mu\text{C})$$

כעת, לאחר שבידנו המטען של כל קבל, נוכל להיעזר בנוסחה $W_C=\frac{Q^2}{2C}$ ולחשב את האנרגיה של כל קבל, כמתבקש בשאלה. מכאן:

$$W_{C_1}=\frac{{Q_{C_1}}^2}{2C_1}=\frac{(1800\mu)^2}{2\cdot 30\mu}=54(\text{mJ})$$

$$W_{C_2}=\frac{{Q_{C_2}}^2}{2C_2}=\frac{(1200\mu)^2}{2\cdot 20\mu}=36(\text{mJ})$$

$$W_{C_3}=\frac{{Q_{C_3}}^2}{2C_3}=\frac{(600\mu)^2}{2\cdot 120\mu}=1.5(\text{mJ})$$

$$W_{C_4}=\frac{{Q_{C_4}}^2}{2C_4}=\frac{(600\mu)^2}{2\cdot 15\mu}=12(\text{mJ})$$

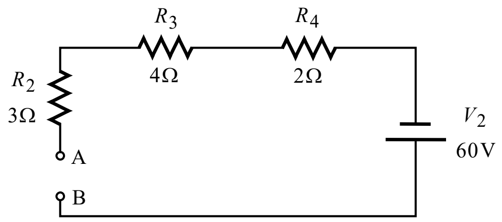
$$W_{C_5}=\frac{{Q_{C_5}}^2}{2C_5}=\frac{(225\mu)^2}{2\cdot 15\mu}=1.687(\text{mJ})$$

$$W_{C_6}=\frac{{Q_{C_6}}^2}{2C_6}=\frac{(375\mu)^2}{2\cdot 25\mu}=2.812(\text{mJ})$$

ג. שני לוחות הקבל טעונים במטען שווה בגודלו אך הפוך בסימנו. כידוע, בין מטענים שוני סימן פועל לעולם כוח משיכה. הלכך בין שני לוחותיו של קבל טעון פועל לעולם **כוח משיכה**.

שאלה 4

א. מכיוון שהמפסק S_1 פתוח, מקור המתח V_1 אינו מחובר למעגל. נתון בשאלה שכל תופעות המעבר חלפו. במצב זה הקבל שקול לנֶתֶק. נשרטט מעגל שקול:

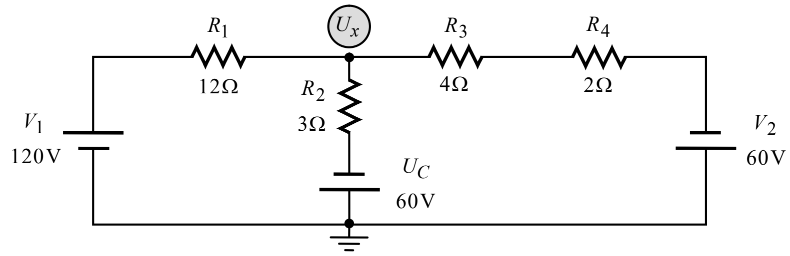


במצב המתקבל אין מעגל סגור. הזרם במעגל הוא אפס, ולכן המתח על הנגדים הוא אפס. המתח על הקבל הוא המתח בין ההדקים A ו-B שנותרו לאחר ניתוקו. מסלול מתחים בין הדקים אלה נותן:

$$U_C = V_2 = 60(\mathrm{V})$$

יש לשים לב **לקוטביות** מתח הקבל שחישבנו. נקודה B תקבל סימן "פלוס", ונקודה A תקבל סימן "מינוס". הדבר נובע מכיוונו של המקור V_2. נתון זה נצרך לסעיף הבא.

ב. לקבל יש תכונה שהוא שומר על רציפות המתח דרכו. הלכך, מיד לאחר סגירת המפסק S_1, המתח על הקבל יהיה עדיין המתח אותו קיבלנו בסעיף הקודם, בגודל ובקוטביות. הקבל משמש למעשה כמקור מתח שערכו הולך ומשתנה. נניח במקום הקבל מקור מתח שקול, ונשרטט את המעגל המתקבל:



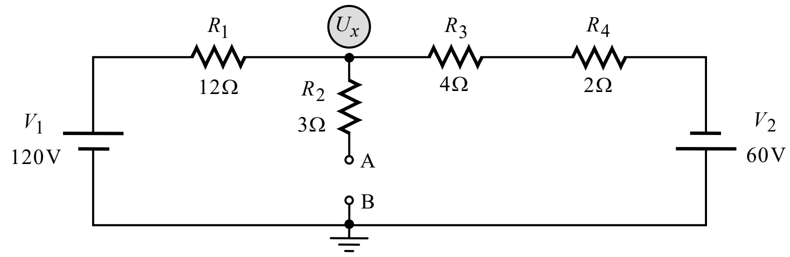
נחשב את U_x בעזרת משפט מילמן:

$$U_x = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{U_C}{R_2} - \frac{V_2}{R_3 + R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{3-4}}} = \frac{\frac{120}{12} - \frac{60}{3} - \frac{60}{4+2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4+2}} = -34.285(\mathrm{V})$$

נחשב את הזרם דרך הקבל:

$$I_C = I_{R_2} = \frac{U_x - (-U_C)}{R_2} = \frac{-34.285 - (-60)}{3} = 8.571(\mathrm{A})$$

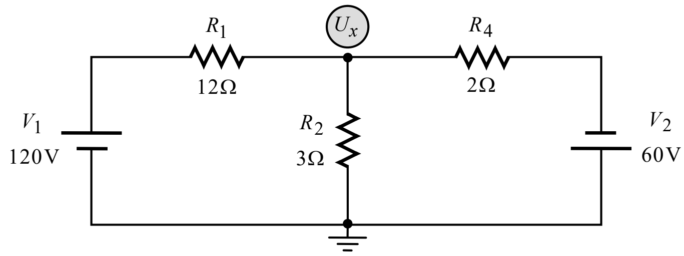
במצב המתמיד הקבל שקול לנֶתֶק. נשרטט מעגל שקול:



המתח על הקבל הוא המתח בין A ל-B. מכיוון ש- R_2 מנותק המתח עליו הוא אפס. נמצא שהמתח על הקבל הוא למעשה המתח U_x. המעגל שקיבלנו הוא מעגל טורי, שאינו מצריך שימוש בשיטות פתרון מיוחדות. מכל מקום גם כאן נוח יהיה לחשב בעזרת משפט מילמן. מכאן:

$$U_C = U_x = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_3 + R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{3-4}}} = \frac{\frac{120}{12} - \frac{60}{4+2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4+2}} = 0(\text{V})$$

ג. סגירת המפסק S_2 גורמת לקיצורו של R_3. בדומה לסעיף הקודם, גם כאן יש להמשיך עם המתח של הקבל שהתקבל בסעיף הקודם. אולם מכיוון שקיבלנו אפס, נשרטט חוט קצר במקום הקבל (השקול למקור מתח שערכו אפס). מצב זה למעשה זהה למצב ההתחלתי של טעינת קבל מאפס, שבו הקבל שקול לקֶצֶר. נשרטט מעגל שקול:



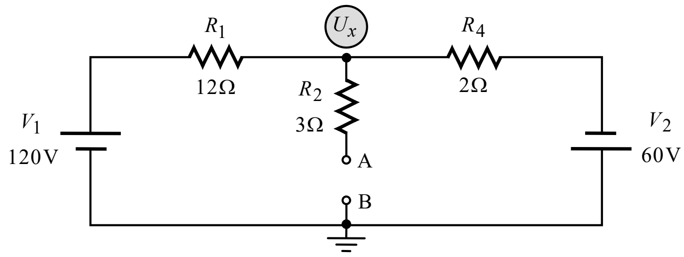
נפתור גם כאן בעזרת משפט מילמן:

$$U_x = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{120}{12} - \frac{60}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = -21.818(\text{V})$$

$$I_C = I_{R_2} = \frac{U_x}{R_2} = \frac{21.818}{3} = 7.272(\text{A})$$

הסימן השלילי שקיבלנו למתח מציין קוטביות בלבד, דבר שאינו רלוונטי לסעיף זה, ולכן סימן זה הושמט בחישוב הזרם.

במצב המתמיד הקבל שקול לנתק. נשרטט מעגל שקול:

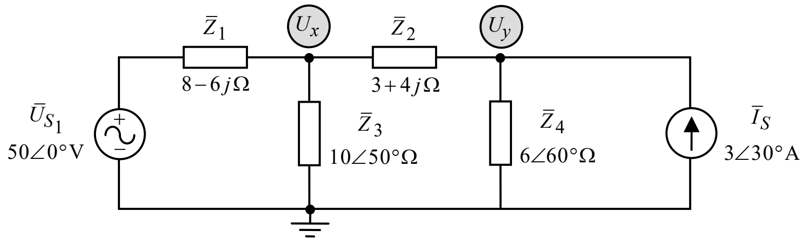


דרך הפתרון כאן תהא זהה לחלוטין לדרך הפתרון של סוף הסעיף הקודם (במצב המתמיד). מדובר גם במעגלים זהים, אלא שכאן הנגד R_3 מקוצר. מכאן:

$$U_C = U_x = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{120}{12} - \frac{60}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2}} = -34.285(\mathrm{V})$$

שאלה 5

א.



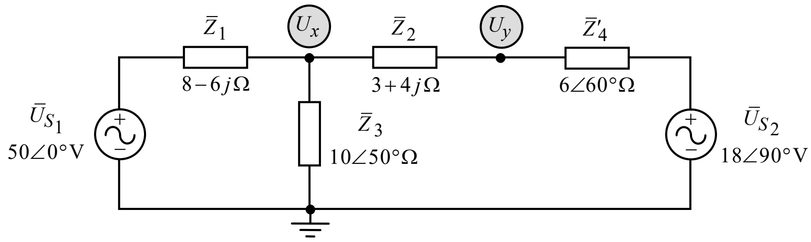
שאלה זו מתאימה לפתרון בשיטת מתחי הצמתים, בניסוח שתי משוואות לשני הצמתים שבאיור. אולם מכיוון שנכון לזמן כתיבת שורות אלו, לרוב ככל הסטודנטים אין מחשבון התומך בפתרון מערכת משוואות עם מספרים מרוכבים, נבצע הפיכת מקורות – נמיר את מקור הזרם והעכבה $\bar{Z}_4$ למקור מתח שקול, וכך נקבל מתחי צמתים בנעלם אחד, או פיתרון במילמן.

על פי עיקרון המרת המקורות, מקור הזרם $\bar{I}_S$ והעכבה $\bar{Z}_4$ שבמקביל אליו, יומרו למקור מתח $\bar{U}_{S_2}$, שיחובר בטור לעכבה דומה $\bar{Z}'_4$. על פי עיקרון המרת המקורות, ערכי המקור החדש יהיו:

$$\bar{U}_{S_2} = \bar{I}_S \cdot \bar{Z}_4 = (3\angle 30°)(6\angle 60°) = 18\angle 90°(\text{V})$$

$$\bar{Z}'_4 = \bar{Z}_4 = 6\angle 60°(\Omega)$$

נשרטט מעגל שקול:



במעגל שקיבלנו העכבות $\bar{Z}_2$ ו- $\bar{Z}'_4$ מחוברות בטור. נחשב את $\bar{U}_x$ בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_x = \frac{\dfrac{\bar{U}_{S_1}}{\bar{Z}_1} + \dfrac{\bar{U}_{S_2}}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}'_4}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_1} + \dfrac{1}{\bar{Z}_3} + \dfrac{1}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}'_4}} = \frac{\dfrac{50\angle 0°}{8-6j} + \dfrac{18\angle 90°}{3+4j+6\angle 60°}}{\dfrac{1}{8-6j} + \dfrac{1}{10\angle 50°} + \dfrac{1}{3+4j+6\angle 60°}} = 30.850\angle 61.522°(\text{V})$$

את $\bar{U}_y$ נוכל לקבל על ידי מסלול מתחים מנקודה זו לאדמה. נחשב תחילה את הזרם ואת המתח של $\bar{Z}'_4$:

$$\bar{I}_{Z'_4} = \frac{\bar{U}_x - \bar{U}_{S_2}}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}'_4} = \frac{30.850\angle 61.522° - 18\angle 90°}{3+4j+6\angle 60°} = 1.576\angle -25.085°(\text{A})$$

$$\bar{U}_{Z'_4} = \bar{I}_{Z'_4} \cdot \bar{Z}'_4 = (1.576\angle -25.085°)(6\angle 60°) = 9.456\angle 34.914°(\text{V})$$

בחישוב הזרם חיסרנו $\bar{U}_x - \bar{U}_{S_2}$ (ולא להיפך). דבר זה אומר שקבענו את הזרם בכיוון ימין. הלכך ההדק השמאלי של $\bar{Z}'_4$ מקבל סימן "פלוס". מסלול מתחים מ- $\bar{U}_y$ לאדמה נותן:

$$\bar{U}_y = +\bar{U}_{Z'_4} + \bar{U}_{S_2} = 9.456\angle 34.914° + 18\angle 90° = 24.663\angle 71.674°(\text{V})$$

ב. נחזור למעגל המקורי שהוצג לעיל תחילת סעיף א׳. המתח $\bar{U}_y$ שמצאנו, הוא המתח של $\bar{I}_S$.
נחשב את ההספקים של $\bar{I}_S$:

$$\bar{S}_{I_S} = \bar{U}_y \cdot \bar{I}_S{}^* = (24.663\angle 71.674°)(3\angle -30°) = 55.265 + 49.195j = 73.989\angle 41.674°(\text{VA})$$

מכאן :

$$P_{I_S} = 55.265(\text{W})$$

$$Q_{I_S} = 49.195(\text{VAR})$$

$$S_{I_S} = 73.989(\text{VA})$$

נחשב את הזרם של $\bar{U}_{S_1}$:

$$\bar{I}_{\bar{U}_{S_1}} = \frac{\bar{U}_{S_1} - \bar{U}_x}{\bar{Z}_1} = \frac{50\angle 0° - 30.850\angle 61.522°}{8-6j} = 4.450\angle -0.669°(\text{A})$$

נחשב את ההספקים של $\bar{U}_{S_1}$:

$$\bar{S}_{U_{S_1}} = \bar{U}_{S_1} \cdot \bar{I}_{\bar{U}_{S_1}}{}^* = (50\angle 0°)(4.450\angle +0.669°) = 222.513 + 2.599j = 222.528\angle 0.669°(\text{VA})$$

מכאן :

$$P_{U_{S_1}} = 222.513(\text{W})$$

$$Q_{U_{S_1}} = 2.599(\text{VAR})$$

$$S_{U_{S_1}} = 222.528(\text{VA})$$

ג. לעיל סוף סעיף א׳ חישבנו את המתח ואת הזרם של $\bar{Z}'_4$. אולם יש לשים לב שאין אלה המתח והזרם של $\bar{Z}_4$ במעגל המקורי (מסיבה זו העכבה החדשה סומנה עם תג מעליה).

המתח של $\bar{Z}_4$ במעגל המקורי הוא $\bar{U}_y$. נחשב את הזרם ואת ההספקים של $\bar{Z}_4$:

$$\bar{I}_{Z_4} = \frac{\bar{U}_y}{\bar{Z}_4} = \frac{24.663\angle 71.674°}{6\angle 60°} = 4.110\angle 11.674°(\text{A})$$

$$\bar{S}_{Z_4} = \bar{U}_y \cdot \bar{I}_{Z_4}{}^* = (24.663\angle 71.674°)(4.110\angle -11.674°) =$$

$$= 50.689 + 87.796j = 101.379\angle 60°(\text{VA})$$

מכאן :

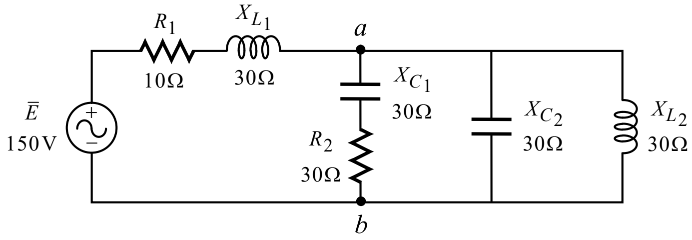
$$P_{Z_4} = 50.689(\text{W})$$

$$Q_{Z_4} = 87.796(\text{VAR})$$

$$S_{Z_4} = 101.379(\text{VA})$$

שאלה 6

א.



נציין כי הנתון שהמעגל בתהודה אינו נצרך לפתרון. נפתור כמו מעגל AC רגיל. נוכל לחשב בקלות את המתח $\bar{U}_{ab}$ בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_{ab}=\frac{\dfrac{\bar{E}}{R_1+jX_{L_1}}}{\dfrac{1}{R_1+jX_{L_1}}+\dfrac{1}{R_2-jX_{C_1}}+\dfrac{1}{-jX_{C_2}}+\dfrac{1}{jX_{L_2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{150}{10+j30}}{\dfrac{1}{10+j30}+\dfrac{1}{30-j30}+\dfrac{1}{-j30}+\dfrac{1}{j30}}=159.099\angle-45°(\text{V})$$

ב. נזכיר כי מכשירי המדידה נותנים את התוצאות בערך מוחלט (ללא זווית). מד המתח V_1 מודד את המתח של X_{L_1}. נחשב מתח זה:

$$\bar{I}_{X_{L_1}}=\frac{\bar{E}-\bar{U}_{ab}}{R_1+jX_{L_1}}=\frac{150-159.099\angle-45°}{10+j30}=3.75(\text{A})$$

$$\bar{U}_{X_{L_1}}=\bar{I}_{X_{L_1}}\cdot jX_{L_1}=3.75\cdot j30=112.5\angle 90°(\text{V})$$

$$V_1=\left|\bar{U}_{X_{L_1}}\right|=112.5(\text{V})$$

מד המתח V_2 מודד את המתח של X_{L_1} יחד עם המתח של X_{C_1}. ניעזר בכלל מחלק המתח ונחשב את $\bar{U}_{X_{C_1}}$:

$$\bar{U}_{X_{C_1}}=\frac{\bar{U}_{ab}\cdot\left(-jX_{C_1}\right)}{R_2-jX_{C_1}}=\frac{(159.099\angle-45°)(-j30)}{30-j30}=112.5\angle-90°(\text{V})$$

$$\bar{U}_{X_{L_1}}+\bar{U}_{X_{C_1}}=112.5\angle 90°+112.5\angle-90°=0(\text{V})$$

$$V_2=0(\text{V})$$

מד הזרם A_3 מודד את הזרם של X_{C_2}. נחשב זרם זה:

$$\bar{I}_{X_{C_2}}=\frac{\bar{U}_{ab}}{-jX_{C_2}}=\frac{159.099\angle-45°}{-j30}=5.303\angle 45°(\text{A})$$

$$A_3=\left|\bar{I}_{X_{C_2}}\right|=5.303(\text{A})$$

מד הזרם A_4 מודד את הזרם של X_{L_2}. נחשב זרם זה:

$$\overline{I}_{X_{L_2}} = \frac{\overline{U}_{ab}}{jX_{L_2}} = \frac{159.099\angle -45°}{j30} = 5.303\angle -135°(\mathrm{A})$$

$$A_4 = \left|\overline{I}_{X_{L_2}}\right| = 5.303(\mathrm{A})$$

שאלה 7

א. את החלחלות המגנטית μ_r נחשב בעזרת הקשר הבא:

$$B=\mu_0\mu_r H \quad \Rightarrow \quad \mu_r=\frac{B}{\mu_0 H}$$

כל שעלינו לעשות הוא לבחור ערכים של B ושל H מהאופיינים הנתונים בשאלה. נבחר נקודות על האופיינים ששיעוריהן ברורים, ונחשב את החלחלות המגנטית של שני החומרים:

פלדה $$\mu_{r_1}=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{1.0}{4\pi 10^{-7}\cdot 300}=2652.582$$

ברזל $$\mu_{r_2}=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{1.0}{4\pi 10^{-7}\cdot 800}=994.718$$

ב. נרכז נתונים. יש לשים לב שהאורך הנתון הוא האורך של שני החומרים יחד. מכאן:

$$\ell_1=\ell_2=\frac{180}{2}=90(\text{mm})=90\times 10^{-3}(\text{m})$$

$$A=25\left(\text{mm}^2\right)=25\times 10^{-6}\left(\text{m}^2\right)$$

$$N=180$$

$$B=1(\text{T})$$

נחשב את המיאון של כל אחד מהחומרים, ואת המיאון השקול:

$$R_{m_1}=\frac{\ell_1}{\mu_0\mu_{r_1}A}=\frac{90\times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}\cdot 2652.582\cdot 25\times 10^{-6}}=1.08\times 10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_2}=\frac{\ell_2}{\mu_0\mu_{r_2}A}=\frac{90\times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}\cdot 994.718\cdot 25\times 10^{-6}}=2.88\times 10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_\text{T}}=R_{m_1}+R_{m_2}=1.08\times 10^6+2.88\times 10^6=3.96\times 10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

ג. נתון בשאלה $B=1\,\text{T}$ (נעיר כי ערכי B המופיעים באופיינים מעידים על אופן השינוי של B כתלות ב-H, ואינם הערכים בפועל בליבה). מכיוון שמדובר במעגל טורי בעל אותו שטח חתך לכל אורכו, ערך זה של B נכון לשני חלקי הליבה. נחשב את השטף בליבה בעזרת הקשר הבא:

$$\phi=BA=1\cdot 25\times 10^{-6}=25(\mu\text{Wb})$$

נחשב את הזרם בעזרת הקשר הבא:

$$\phi=\frac{NI}{R_{m_\text{T}}} \quad \Rightarrow$$

$$I=\frac{\phi\cdot R_{m_\text{T}}}{N}=\frac{25\times 10^{-6}\cdot 3.96\times 10^6}{180}=0.55(\text{A})$$

ד. נחשב תחילה את ההשראות העצמית של הסליל, ולאחר מכן את האנרגיה האגורה בו:

$$L = \frac{N^2}{R_{m_T}} = \frac{180^2}{3.96\times10^6} = 8.181(\text{mH})$$

$$W_L = \frac{L\cdot I^2}{2} = \frac{8.181\times10^{-3}\cdot0.55^2}{2} = 1.237(\text{mJ})$$

שאלה 8

א. מכיוון שהמעגל הנתון מכיל מקורות AC בעלי תדירויות שונות, יש לפתור בסופרפוזיציה.

תרומת $v_1(t)$:

נתון :

$$v_1(t)=15\sin(1000t)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית) :

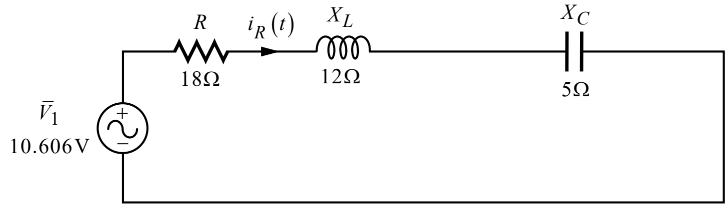
$$\bar{V}_1=\frac{15}{\sqrt{2}}=10.606(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה :

$$X_L=\omega L=1000\cdot 12\times 10^{-3}=12(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot 200\times 10^{-6}}=5(\Omega)$$

ננתק את מקור הזרם, נקצר את $v_2(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל :



נחשב את הזרם המבוקש :

$$\bar{I}'_R=\frac{\bar{V}_1}{R+jX_L-jX_C}=\frac{10.606}{18+j12-j5}=0.549\angle-21.250°(\mathrm{A})$$

תרומת $v_2(t)$:

נתון :

$$v_2(t)=10\sin(1500t+60°)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית) :

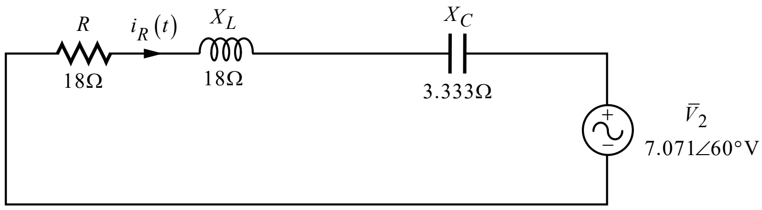
$$\bar{V}_2=\frac{10\angle 60°}{\sqrt{2}}=7.071\angle 60°(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה :

$$X_L=\omega L=1500\cdot 12\times 10^{-3}=18(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1500\cdot 200\times 10^{-6}}=3.333(\Omega)$$

ננתק את מקור הזרם, נקצר את $v_1(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל :



נחשב את הזרם המבוקש:

$$\overline{I}''_R = \frac{\overline{V}_2}{R + jX_L - jX_C} = \frac{7.071\angle 60^\circ}{18 + j18 - j3.333} = 0.304\angle 20.826^\circ(\mathrm{A})$$

תרומת $i_s(t)$:

נתון:

$$i_s(t) = 2\sin(500t)(\mathrm{A})$$

נציג את זרם המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

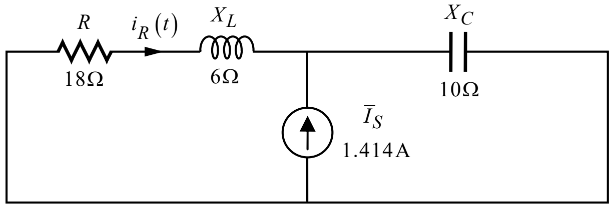
$$\overline{I}_S = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414(\mathrm{A})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L = \omega L = 500 \cdot 12 \times 10^{-3} = 6(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \cdot 200 \times 10^{-6}} = 10(\Omega)$$

נקצר את שני מקורות המתח, ונשרטט את המעגל המתקבל:



ניעזר בכלל מחלק הזרם, ונחשב את הזרם המבוקש:

$$\overline{I}'''_R = \frac{(\overline{I}_S)(-jX_C)}{R + jX_L - jX_C} = \frac{(1.414)(-j10)}{18 + j6 - j10} = 0.766\angle -77.471^\circ(\mathrm{A})$$

נסכם את התרומות: הזרם שתורם $v_1(t)$ פועל בכיוון ימין, ככיוון הנתון של הזרם המבוקש ולכן הוא יופיע בסימן חיובי. שני הזרמים שתורמים $v_2(t)$ ו- $i_s(t)$ פועלים בכיוון ההפוך ולכן הם יופיעו בסימן שלילי. את הזרם הכולל נציג כתלות בזמן כנדרש בפתרון בספורפוזיציה, וכנדרש בשאלה עצמה. מכאן:

$$i_R(t) = i'(t) - i''(t) - i'''(t) =$$

$$= 0.549\sqrt{2}\sin(1000t - 21.250^\circ) - 0.304\sqrt{2}\sin(1500t + 20.826^\circ) - 0.766\sqrt{2}\sin(500t - 77.471^\circ)(\mathrm{A})$$

<u>הערה</u>: במקום הסימן השלילי לפני שני הזרמים האחרונים, יכולנו לרשום סימן "פלוס", ואת הזוויות להפוך ב- 180° (שכן הכפלת מספר פולארי ב- -1 גורמת להיפוך הזווית).

ב. שלושת המקורות הפועלים במעגל הם מקורות סינוס. כידוע הממוצע של אות סינוס הוא אפס. הלכך הממוצע הכולל הוא גם כן אפס. ובניסוח מתמטי:

$$I_{R\,(\mathrm{av})}=0(\mathrm{A})$$

ג. את הערך היעיל השקול נחשב בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$I_{R\,(\mathrm{rms})}=\sqrt{I^2_{\mathrm{rms}_1}+I^2_{\mathrm{rms}_2}+I^2_{\mathrm{rms}_3}}=\sqrt{0.549^2+0.304^2+0.766^2}=0.991(\mathrm{A})$$

<u>הערה</u>: בנוסחה זו יש להציב תמיד את הערכים בסימן חיובי, וכפי שהערנו על כך כמה פעמים (הרחבה על נידון זה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק באותות מחזוריים).

ד. את ההספק הממוצע מחשבים תמיד בעזרת הערך היעיל. מכאן:

$$P_R=I^2_{R\,(\mathrm{rms})}\cdot R=0.991^2\cdot 18=17.686(\mathrm{W})$$