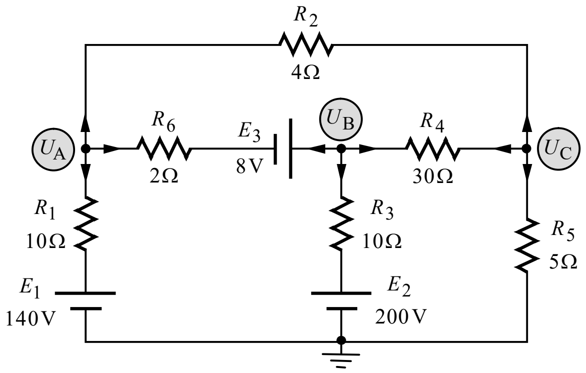
פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – קיץ 2021 מועד א׳

שאלה 1

א. נפתור במתחי צמתים. נשרטט את המעגל המתקבל:



הנחנו כתמיד שכל הזרמים יוצאים מכל צומת וצומת. נמצא את משוואות הצמתים.

צומת A:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A:

שלב א׳:
$$(A)\ I_{R_1}+I_{R_6}+I_{R_2}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב׳:
$$(A)\ \frac{U_A-E_1}{R_1}+\frac{U_A-(-E_3)-U_B}{R_6}+\frac{U_A-U_C}{R_2}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳:
$$(A)\ \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)U_A-\left(\frac{1}{R_6}\right)U_B-\left(\frac{1}{R_2}\right)U_C=\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_3}{R_6}$$

נציב ערכים:

שלב ד׳:
$$(A)\ \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)U_A-\left(\frac{1}{2}\right)U_B-\left(\frac{1}{4}\right)U_C=\frac{140}{10}-\frac{8}{2}$$

צומת B:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B:

שלב א׳:
$$(B)\ I'_{R_6}+I_{R_3}+I_{R_4}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב׳:
$$(B)\ \frac{U_B-E_3-U_A}{R_6}+\frac{U_B-E_2}{R_3}+\frac{U_B-U_C}{R_4}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳:
$$(B)\ -\left(\frac{1}{R_6}\right)U_A+\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_B-\left(\frac{1}{R_4}\right)U_C=\frac{E_3}{R_6}+\frac{E_2}{R_3}$$

נציב ערכים:

שלב ד׳:
$$(B)\ -\left(\frac{1}{2}\right)U_A+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)U_B-\left(\frac{1}{30}\right)U_C=\frac{8}{2}+\frac{200}{10}$$

<u>צומת C:</u>

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת C:

שלב א׳:

$$\left(\mathrm{C}\right)\ I_{R_5}+I'_{R_4}+I'_{R_2}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב׳:

$$\left(\mathrm{C}\right)\ \frac{U_{\mathrm{C}}-0}{R_5}+\frac{U_{\mathrm{C}}-U_{\mathrm{B}}}{R_4}+\frac{U_{\mathrm{C}}-U_{\mathrm{A}}}{R_2}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳:

$$\left(\mathrm{C}\right)-\left(\frac{1}{R_2}\right)U_{\mathrm{A}}-\left(\frac{1}{R_4}\right)U_{\mathrm{B}}+\left(\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}\right)U_{\mathrm{C}}=0$$

נציב ערכים:

שלב ד׳:

$$\left(\mathrm{C}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)U_{\mathrm{A}}-\left(\frac{1}{30}\right)U_{\mathrm{B}}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{4}\right)U_{\mathrm{C}}=0$$

<u>לסיכום:</u>

קיבלנו שלוש משוואות בשלושה נעלמים:

$$\begin{cases}\left(\mathrm{A}\right)\ \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)U_{\mathrm{A}}-\left(\frac{1}{2}\right)U_{\mathrm{B}}-\left(\frac{1}{4}\right)U_{\mathrm{C}}=\frac{140}{10}-\frac{8}{2}\\ \left(\mathrm{B}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)U_{\mathrm{A}}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)U_{\mathrm{B}}-\left(\frac{1}{30}\right)U_{\mathrm{C}}=\frac{8}{2}+\frac{200}{10}\\ \left(\mathrm{C}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)U_{\mathrm{A}}-\left(\frac{1}{30}\right)U_{\mathrm{B}}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{4}\right)U_{\mathrm{C}}=0\end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן:

$$U_{\mathrm{A}}=100\left(\mathrm{V}\right)$$

$$U_{\mathrm{B}}=120\left(\mathrm{V}\right)$$

$$U_{\mathrm{C}}=60\left(\mathrm{V}\right)$$

ב. נחשב את הזרמים העוברים דרך E_1 ו- E_3, בעזרת הביטויים שקיבלנו בשלב ב׳ לעיל של משוואת צומת A:

$$I_{E_1}=\frac{U_{\mathrm{A}}-E_1}{R_1}=\frac{100-140}{10}=-4\left(\mathrm{A}\right)$$

$$I_{E_3}=\frac{U_{\mathrm{A}}-\left(-E_3\right)-U_{\mathrm{B}}}{R_6}=\frac{100-\left(-8\right)-120}{2}=-6\left(\mathrm{A}\right)$$

ביטויים אלה נלקחו ממשוואת צומת A, שלגביה הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. שני הזרמים יצאו שליליים, מה שאומר שכיוונם הפוך להנחה ההתחלתית – כלומר **שניהם נכנסים לצומת A**.

נמצא שהזרם דרך E_1 יוצא מההדק החיובי שלו, ולכן מקור זה **ספק**. כמו כן נמצא שהזרם דרך E_3 נכנס אל ההדק החיובי שלו, ולכן מקור זה **צרכן**.

נחשב את הזרם העובר דרך E_2, בעזרת הביטוי שקיבלנו בשלב ב' לעיל של משוואת צומת B:

$$I_{E_2} = \frac{U_B - E_2}{R_3} = \frac{120-200}{10} = -8(\mathrm{A})$$

ביטוי זרם זה נלקח ממשוואת צומת B, שלגביה הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. קיבלנו תוצאה שלילית, מה שאומר שכיוונו של הזרם הפוך להנחה ההתחלתית – **כלומר הוא נכנס לצומת B**. נמצא שהזרם יוצא מההדק החיובי של E_2 ולכן מקור זה **ספק**.

נחשב את הספקי שלושת המקורות בעזרת הזרמים שמצאנו (אנו לא נציב את הסימן השלילי של הזרמים, שכן הוא מציין כיוון בלבד, ונתון זה כבר נלקח בחשבון בקביעה מי ספק ומי צרכן):

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 140 \cdot 4 = 560(\mathrm{W})$$

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_{E_2} = 200 \cdot 8 = 1600(\mathrm{W})$$

$$P_{E_3} = E_3 \cdot I_{E_3} = 8 \cdot 6 = 48(\mathrm{W})$$

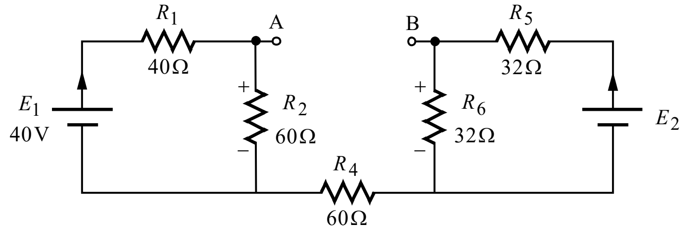
ג. כאמור בסעיף הקודם, המקורות E_1 ו- E_2 ספקים, והמקור E_3 צרכן.

שאלה 2

א. נוח יהיה לפתור שאלה זו בעזרת משפט תבנין, וכפי שנראה. נמצא תחילה את מעגל תבנין המתקבל עבור הדקי הנגד R_3 , ולאחר מכן נבוא אל המבוקש שבשאלה.

<u>חישוב מתח תבנין:</u>

ננתק את R_3 ונשרטט את המעגל המתקבל:



ניתוקו של R_3 גרם לכך, ששני חלקי המעגל מתפקדים כשני מעגלים טוריים נפרדים. במצב זה לא עובר זרם דרך R_4 .

מתח תבנין הוא המתח בין A ל-B. נוכל לקבל ביטוי למתח זה בעזרת מסלול מתחים העובר דרך R_2 , R_4 , R_6 . קוטביות מתחי הנגדים שבמסלול שסומנה מראש באיור, נקבעה על פי כיוון הזרם דרכם (בנגד, נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי).

נחשב את המתח הנופל על R_2 בעזרת כלל מחלק המתח:

$$U_{R_2} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24(\mathrm{V})$$

נמצא ביטוי פשוט ל- U_{R_6}. בחלק המעגל הימני שני הנגדים R_5 ו- R_6 שווים בערכם. מכאן:

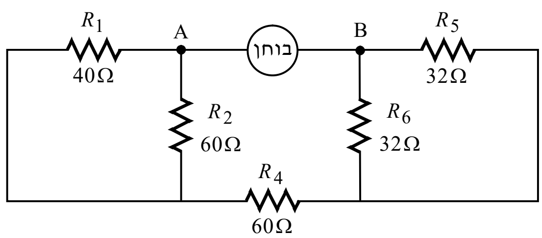
$$U_{R_6} = \frac{E_2}{2} = 0.5E_2$$

נמצא ביטוי למתח תבנין:

$$E_{\mathrm{Th}} = U_{\mathrm{AB}} = +U_{R_2} - U_{R_6} = 24 - 0.5E_2$$

<u>חישוב התנגדות תבנין:</u>

נקצר את מקורות המתח, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:



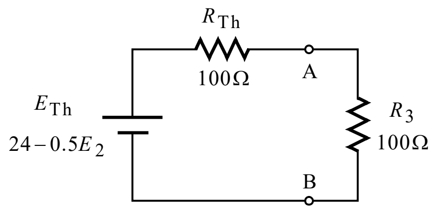
$$R_{\mathrm{Th}} = R_1 \parallel R_2 + R_4 + R_5 \parallel R_6 =$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_4 + \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{60}\right)^{-1} + 60 + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right)^{-1} = 100(\Omega)$$

נבוא כעת אל המבוקש בשאלה. כידוע, התנאי להעברת הספק מקסימלי במעגלי DC הוא:

$$R_3 = R_{\mathrm{Th}} = 100(\Omega)$$

ב. נחבר את R_3 למעגל תבנין שקיבלנו:



הכיוון של E_{Th} הוא בגדר הנחה התחלתית בלבד (שהרי ערכו של E_2 עדיין אינו ידוע). נתון שההספק המקסימלי המתפתח ב- R_3 הוא $0.25\,\mathrm{W}$. נחשב את הזרם במעגל תבנין:

$$P_{R_3}=I^2\cdot R_3 \quad \Rightarrow$$

$$I=\sqrt{\frac{P_{R_3}}{R_3}}=\sqrt{\frac{0.25}{100}}=\pm\,0.05(\mathrm{A})$$

הסימן של הזרם מעיד על כיוון. פירוש הפתרון הוא אם כן, שעל פי נתון ההספק של R_3 ניתן אמנם לחשב את **גודל** הזרם דרכו, אולם **כיוון** הזרם דרכו אינו נתון בשאלה, ולכן ישנם שני כיוונים אפשריים לזרם (מה שאומר גם שני כיוונים אפשריים ל- E_{Th}).

נחשב את E_2 עבור שתי אפשרויות הזרם שקיבלנו:

$$E_{Th}=I\left(R_{Th}+R_3\right)$$

$$24-0.5E_2=0.05(100+100) \qquad\qquad 24-0.5E_2=-0.05(100+100)$$

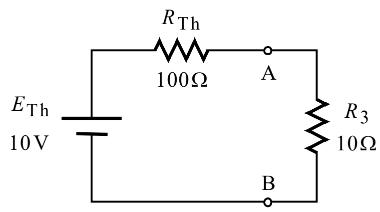
$$E_{2(x)}=28(\mathrm{V}) \qquad\qquad E_{2(y)}=68(\mathrm{V})$$

הערה: המקור E_2 יצא חיובי בשני המקרים, מה שאומר שבכל אופן הכיוון שלו הינו כפי הנתון בשאלה (אולם הסימן של E_{Th} ייצא שונה בשני המקרים, וכפי שציינו לעיל).

ג. נחשב את ערכו של E_{Th} עבור **אחת** מהאפשרויות שקיבלנו עבור E_2 (בשתי האפשרויות נקבל אותן תוצאות, שונות רק בסימן – מה שאינו רלוונטי לסעיף זה):

$$E_{Th}=24-0.5E_2=24-0.5\cdot 28=10(\mathrm{V})$$

נחבר את R_3 החדש למעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את ההספק שלו:

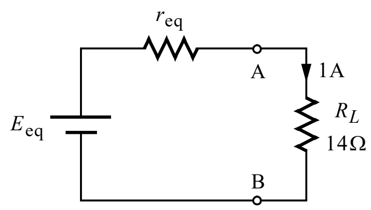


$$I=\frac{E_{Th}}{R_{Th}+R_3}=\frac{10}{100+10}=0.909(\mathrm{A})$$

$$P_{R_3}=I^2\cdot R_3=0.909\cdot 10=0.082(\mathrm{W})$$

שאלה 3

א. נשרטט מעגל שקול ונציין על גביו את הידוע לנו:



נתוני תא בודד:

$E = 1.2\,V$

$r = 0.2\,\Omega$

$Q = 2\,Ah$

נתון בשאלה שמשך הזמן הדרוש להפעלת המכשיר הוא 12h. נוכל לחשב את הקיבול השקול של מערך התאים בעזרת הקשר הבא:

$$Q_{eq} = I \cdot t = 1 \cdot 12 = 12(\text{Ah})$$

נוכל לחשב את m בעזרת הנוסחה לקיבול שקול של מערך תאים:

$$Q_{eq} = m \cdot Q \quad \Rightarrow$$

$$m = \frac{Q_{eq}}{Q} = \frac{12}{2} = 6$$

לצורך חישוב n נעבוד עם כמה משוואות. נרשום תחילה את הנוסחה לכא"מ השקול:

$$(1) E_{eq} = nE = 1.2n$$

מהפעלת חוק אום על המעגל השקול לעיל מתקבל:

$$(2) E_{eq} = I\left(r_{eq} + R_L\right) = 1\left(r_{eq} + 14\right) = r_{eq} + 14$$

נציב משוואה 2 במשוואה 1 ונקבל:

$$(1) E_{eq} = 1.2n$$

$$(1) r_{eq} + 14 = 1.2n$$

נרשום כעת את הנוסחה להתנגדות השקולה של מערך תאים:

$$(3) r_{eq} = \frac{n \cdot r}{m} = \frac{0.2n}{6}$$

נציב את משוואה 3 במשוואה 1 ונקבל:

$$(1) r_{eq} + 14 = 1.2n$$

$$(1) \frac{0.2n}{6} + 14 = 1.2n$$

פתרון המשוואה נותן:

$$n = 12$$

ב. מהסעיף הקודם ידוע שיש 6 ענפים, שבכל אחד מהם 12 תאים בטור. כעת ישנם רק 5 ענפים כאלה, ועוד ענף **אחד** שונה שבו רק 8 תאים בטור. במילים אחרות יש כאן שני מערכים של תאים:

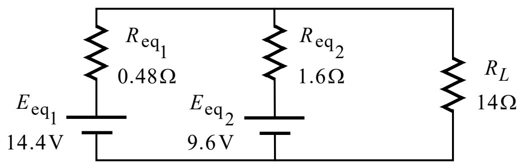
- מערך אחד של תאים המחוברים במעורב, שבו $n_1 = 12$, $m_1 = 5$.
- מערך שני של תאים המחוברים בטור, שבו $n_2 = 8$, $m_2 = 1$ (ענף אחד).

נחשב את הכא"מ השקול ואת ההתנגדות השקולה של שני מערכי התאים:

$$\begin{cases} E_{\text{eq}_1} = n_1 \cdot E = 12 \cdot 1.2 = 14.4(\text{V}) \\ r_{\text{eq}_1} = \dfrac{n_1 \cdot r}{m_1} = \dfrac{12 \cdot 0.2}{5} = 0.48(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\text{eq}_2} = n_2 \cdot E = 8 \cdot 1.2 = 9.6(\text{V}) \\ r_{\text{eq}_2} = \dfrac{n_2 \cdot r}{m_2} = \dfrac{8 \cdot 0.2}{1} = 1.6(\Omega) \end{cases}$$

שני המערכים מחוברים במקביל, ומזינים את נגד העומס. נשרטט את המעגל המתקבל:



נפתור במילמן:

$$U_{R_L} = \frac{\dfrac{E_{\text{eq}_1}}{r_{\text{eq}_1}} + \dfrac{E_{\text{eq}_2}}{r_{\text{eq}_2}}}{\dfrac{1}{r_{\text{eq}_1}} + \dfrac{1}{r_{\text{eq}_2}} + \dfrac{1}{R_L}} = \frac{\dfrac{14.4}{0.48} + \dfrac{9.6}{1.6}}{\dfrac{1}{0.48} + \dfrac{1}{1.6} + \dfrac{1}{14}} = 12.950(\text{V})$$

$$I_{R_L} = \frac{U_{R_L}}{R_L} = \frac{12.950}{14} = 0.925(\text{A})$$

ג. נראה שהאמור בסעיף זה מתייחס למערך המקורי, ולא למערך של הסעיף הקודם. נפתור על סמך הנחה זו.

גם כאן, כמו בסעיף הקודם, רק בענף אחד משהו השתבש, ומכאן שנשארו 5 ענפים תקינים, שהנתונים שלהם זהים לנתוני חמשת הענפים התקינים של הסעיף הקודם. מכאן:

$$E_{\text{eq}_1} = 14.4(\text{V})$$

$$r_{\text{eq}_1} = 0.48(\Omega)$$

לגבי הענף השונה – שני הכאמ"ים שבקוטביות ההפוכה מקזזים שני כאמ"ים תקינים כך שנשארו 8 כאמ"ים תקינים, שהכא"מ השקול שלהם הוא:

$$E_{\text{eq}_2} = n_2 \cdot E = 8 \cdot 1.2 = 9.6(\text{V})$$

לגבי ההתנגדות השקולה של הענף – ישנם 12 התנגדויות פנימיות בטור (שהרי ההתנגדויות לא קוצרו). מכאן:

$$r_{\mathrm{eq}_2}=\frac{n_2\cdot r}{m_2}=\frac{12\cdot 0.2}{1}=2.4(\Omega)$$

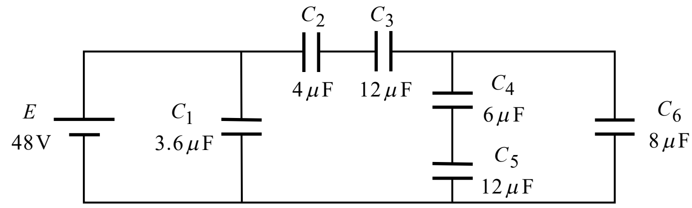
נמצא שנתוני סעיף זה זהים לנתוני הסעיף הקודם, מלבד ההתנגדות השקולה של הענף השונה. נפתור שוב במילמן:

$$U_{R_L}=\frac{\frac{E_{\mathrm{eq}_1}}{r_{\mathrm{eq}_1}}+\frac{E_{\mathrm{eq}_2}}{r_{\mathrm{eq}_2}}}{\frac{1}{r_{\mathrm{eq}_1}}+\frac{1}{r_{\mathrm{eq}_2}}+\frac{1}{R_L}}=\frac{\frac{14.4}{0.48}+\frac{9.6}{2.4}}{\frac{1}{0.48}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{14}}=13.222(\mathrm{V})$$

$$I_{R_L}=\frac{U_{R_L}}{R_L}=\frac{13.222}{14}=0.944(\mathrm{A})$$

שאלה 4

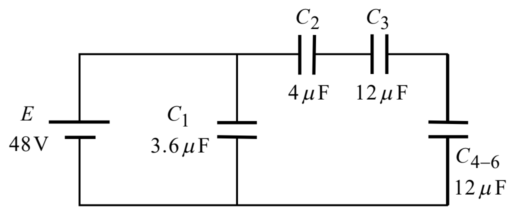
א.



נחשב את הקיבול השקול של המעגל. אנו נשרטט גם שני שלבי ביניים של תהליך זה, שישמשו אותנו הן בסעיף זה, והן בסעיף הבא.

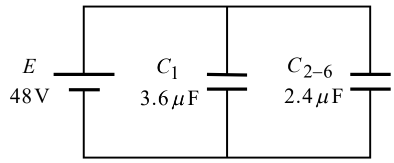
$$C_{4-5}=\left(\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{6\mu}+\frac{1}{12\mu}\right)^{-1}=4(\mu\text{F})$$

$$C_{4-6}=C_{4-5}+C_6=4\mu+8\mu=12(\mu\text{F})$$



שלב א'

$$C_{2-6}=\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_{4-6}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{4\mu}+\frac{1}{12\mu}+\frac{1}{12\mu}\right)^{-1}=2.4(\mu\text{F})$$



שלב ב'

$$C_{\text{T}}=C_1+C_{2-6}=3.6\mu+2.4\mu=6(\mu\text{F})$$

ב. מהתבוננות בשלב ב' שבסעיף הקודם ניתן לראות כי:

$$U_{C_1}=U_{C_{2-6}}=E=48(\text{V})$$

נחשב את המטען של שני קבלים אלה:

$$Q_{C_1}=U_{C_1}\cdot C_1=48\cdot 3.6\mu=172.8(\mu\text{C})$$

$$Q_{C_{2-6}}=U_{C_{2-6}}\cdot C_{2-6}=48\cdot 2.4\mu=115.2(\mu\text{C})$$

מהתבוננות בשלב א' בסעיף הקודם ניתן לראות כי:

$$Q_{C_2}=Q_{C_3}=Q_{C_{4-6}}=Q_{C_{2-6}}=115.2(\mu\text{C})$$

נחשב את המתח של קבלים אלה:

$$U_{C_2}=\frac{Q_{C_2}}{C_2}=\frac{115.2\mu}{4\mu}=28.8(\text{V})$$

$$U_{C_3}=\frac{Q_{C_3}}{C_3}=\frac{115.2\mu}{12\mu}=9.6(\text{V})$$

$$U_{C_{4-6}}=\frac{Q_{C_{4-6}}}{C_{4-6}}=\frac{115.2\mu}{12\mu}=9.6(\text{V})$$

מהתבוננות במעגל המקורי ניתן לראות כי:

$$U_{C_{4-5}} = U_{C_6} = U_{C_{4-6}} = 9.6(\mathrm{V})$$

נחשב את המטען של קבלים אלה:

$$Q_{C_4} = Q_{C_5} = U_{C_{4-5}} \cdot C_{4-5} = 9.6 \cdot 4\mu = 38.4(\mu\mathrm{C})$$

$$Q_{C_6} = U_{C_6} \cdot C_6 = 9.6 \cdot 8\mu = 76.8(\mu\mathrm{C})$$

נשאר לנו לחשב את המתח של כל אחד מהקבלים C_4 ו- C_5:

$$U_{C_4} = \frac{Q_{C_4}}{C_4} = \frac{38.4\mu}{6\mu} = 6.4(\mathrm{V})$$

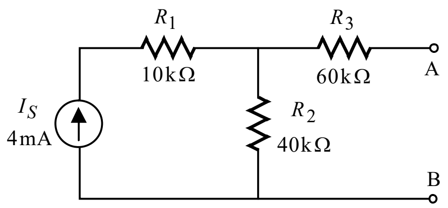
$$U_{C_5} = \frac{Q_{C_5}}{C_5} = \frac{38.4\mu}{12\mu} = 3.2(\mathrm{V})$$

ג.

$$W_{\mathrm{T}} = \frac{C_{\mathrm{T}} \cdot E^2}{2} = \frac{6\mu \cdot 48^2}{2} = 6.912(\mathrm{mJ})$$

שאלה 5

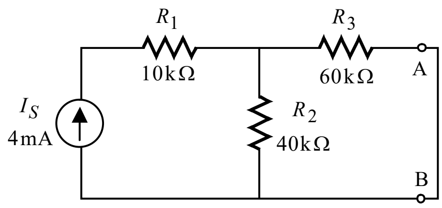
א. מיד לאחר סגירת המפסק הסליל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על הסליל הוא המתח בין A ל-B. מסלול מתחים פשוט בין הנקודות מראה שזהו המתח על R_2 (הנגד R_3 שבמסלול מנותק, ולכן המתח שלו אפס). מכאן:

$$U_L = U_{R_2} = I_S \cdot R_2 = 4\text{m} \cdot 40\text{k} = 160(\text{V})$$

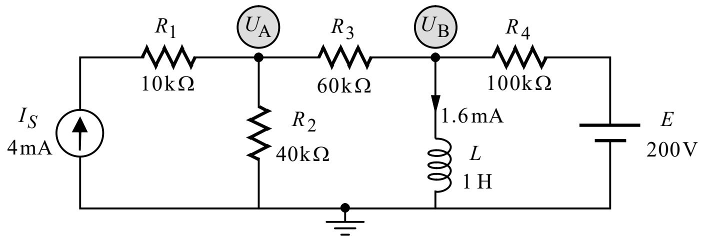
במצב המתמיד הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



הזרם דרך הסליל הוא הזרם בין A ל-B. זהו הזרם דרך R_3. מכאן:

$$I_L = I_{R_3} = \frac{I_S \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{4\text{m} \cdot 40\text{k}}{40\text{k} + 60\text{k}} = 1.6(\text{mA})$$

ב. לסליל יש תכונה שהוא **שומר על רציפות הזרם דרכו**. הלכך, מיד לאחר סגירת המפסק S_2, הזרם בסליל יישאר באותו הגודל ובאותו הכיוון, כפי שהיה רגע לפני סגירת המפסק, כלומר 1.6mA בכיוון מטה, וכפי שהתקבל בסעיף הקודם (נציין כי הקביעה שהסליל שקול לנֶתק במצב ההתחלתי, נכונה רק כאשר הוא אינו טעון, וכמו בתחילת סעיף א'). נשרטט את המעגל החדש, ונציין על גביו את הידוע לנו:



המתח על הסליל הוא המתח U_B. נפתור במתחי צמתים, כאשר הזרם דרך הסליל משמש לנו כזרם נתון במעגל אותו נציב במשוואת צומת B, וכפי שנראה (הסליל במצב זה שקול למקור זרם).

<u>צומת A:</u>

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A:

שלב א':
$$(\text{A})\ I_{R_1}+I_{R_2}+I_{R_3}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד הזרם של מקור הזרם):

שלב ב':
$$(\text{A})\ -I_S+\frac{U_\text{A}-0}{R_2}+\frac{U_\text{A}-U_\text{B}}{R_3}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג':
$$(\text{A})\ \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_\text{A}-\left(\frac{1}{R_3}\right)U_\text{B}=I_S$$

נציב ערכים:

שלב ד':
$$(\text{A})\ \left(\frac{1}{40\text{k}}+\frac{1}{60\text{k}}\right)U_\text{A}-\left(\frac{1}{60\text{k}}\right)U_\text{B}=4\text{m}$$

<u>צומת B:</u>

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B:

שלב א':
$$(\text{B})\ I'_{R_3}+I_L+I_{R_4}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות, **מלבד זרם הסליל שאותו נציב כזרם נתון**:

שלב ב':
$$(\text{B})\ \frac{U_\text{B}-U_\text{A}}{R_3}+1.6\text{m}+\frac{U_\text{B}-E}{R_4}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג':
$$(\text{B})-\left(\frac{1}{R_3}\right)U_\text{A}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_\text{B}=\frac{E}{R_4}-1.6\text{m}$$

נציב ערכים:

שלב ד':
$$(\text{B})-\left(\frac{1}{60\text{k}}\right)U_\text{A}+\left(\frac{1}{60\text{k}}+\frac{1}{100\text{k}}\right)U_\text{B}=\frac{200}{100\text{k}}-1.6\text{m}$$

<u>לסיכום:</u>

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}(\text{A})\ \left(\frac{1}{40\text{k}}+\frac{1}{60\text{k}}\right)U_\text{A}-\left(\frac{1}{60\text{k}}\right)U_\text{B}=4\text{m}\\(\text{B})-\left(\frac{1}{60\text{k}}\right)U_\text{A}+\left(\frac{1}{60\text{k}}+\frac{1}{100\text{k}}\right)U_\text{B}=\frac{200}{100\text{k}}-1.6\text{m}\end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן:

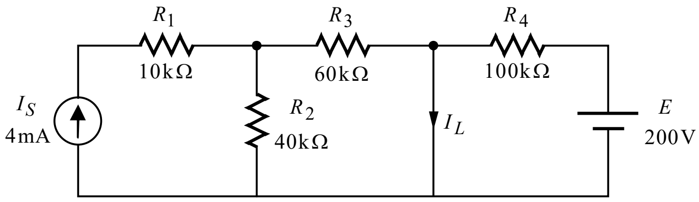
$$U_\text{A}=136(\text{V})$$

$$U_\text{B}=100(\text{V})$$

מכאן:

$$U_L=U_\text{B}=100(\text{V})$$

נעבור לחישוב זרם הסליל במצב המתמיד. במצב המתמיד הסליל תמיד קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



נוכל לקבל את זרם הסליל בקלות בעזרת סופרפוזיציה. יש לשים לב שכאשר בוחנים את תרומתו של כל מקור בנפרד, הקצר הקיים במקום הסליל, מקצר את חלק המעגל שמהצד השני.

<u>תרומת מקור הזרם:</u>

גודל הזרם שמקור זה תורם, זהה למה שחישבנו לעיל סעיף א', שהרי מתקבל אותו מעגל עבור מקור זה:

$$I'_L = I_{R_3} = \frac{I_S \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{4\text{m}\cdot 40\text{k}}{40\text{k}+60\text{k}} = 1.6\left(\text{mA}\right)$$

<u>תרומת מקור המתח:</u>

כאמור הקצר יוצר עבורו מעגל שבו יש רק את מקור המתח ו- R_4 . מכאן:

$$I''_L = I_{R_4} = \frac{E}{R_4} = \frac{200}{100\text{k}} = 2\left(\text{mA}\right)$$

לשתי תרומות הזרם אותו הכיוון. נחבר בין התרומות ונקבל:

$$I_L = I'_L + I''_L = 1.6\text{m} + 2\text{m} = 3.6\left(\text{mA}\right)$$

שאלה 6

א.   מקור המתח של המעגל נתון על ידי:

$$u(t)=200\sqrt{2}\sin\left(1000t+\frac{\pi}{6}\right)(\mathrm{V})$$

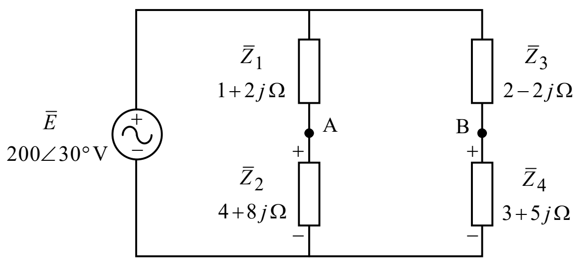
זווית מקור המתח נתונה ברדיאנים (נובע מאופן ההצגה שלה). נמיר זווית זו למעלות. כידוע הגודל π ברדיאנים שווה ערך ל- 180 מעלות. מכאן:

$$\phi=\frac{\pi}{6}=\frac{180^{\circ}}{6}=30^{\circ}$$

נציג את מקור המתח בהצגה חלקית (הצגה פאזורית):

$$\overline{E}=\frac{200\sqrt{2}\angle 30^{\circ}}{\sqrt{2}}=200\angle 30^{\circ}(\mathrm{V})$$

מד המתח אידיאלי ולכן הוא שקול לנֶתֶק. נשרטט את המעגל המתקבל:



מד המתח מודד את המתח בין A ל-B. נוכל לחשב מתח זה בקלות, בעזרת מסלול מתחים פשוט העובר דרך העכבות $\overline{Z}_2$ ו- $\overline{Z}_4$. קוטביות המתחים של עכבות אלו סומנה מראש על גבי השרטוט, על פי כיוון הזרם דרכן (בעכבות כמו בנגדים, נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). נחשב את מתחי העכבות בעזרת כלל מחלק מתח, ומשם את המתח בין A ל-B:

$$\overline{U}_{Z_2}=\frac{\overline{E}\cdot\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}=\frac{200\angle 30^{\circ}\cdot(4+8j)}{1+2j+4+8j}=160\angle 30^{\circ}(\mathrm{V})$$

$$\overline{U}_{Z_4}=\frac{\overline{E}\cdot\overline{Z}_4}{\overline{Z}_3+\overline{Z}_4}=\frac{200\angle 30^{\circ}\cdot(3+5j)}{2-2j+3+5j}=200\angle 58.072^{\circ}(\mathrm{V})$$

$$\overline{U}_{\mathrm{AB}}=+\overline{U}_{Z_2}-\overline{U}_{Z_4}=160\angle 30^{\circ}-200\angle 58.072^{\circ}=95.547\angle -69.926^{\circ}(\mathrm{V})$$

מד המתח מראה רק את גודל המתח, ללא הזווית. מכאן:

$$U_{(\mathrm{voltmeter})}=95.547(\mathrm{V})$$

ב.

$$\overline{Z}_{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}+\frac{1}{\overline{Z}_3+\overline{Z}_4}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{1+2j+4+8j}+\frac{1}{2-2j+3+5j}\right)^{-1}=$$

$$=2.955+2.657j=3.974\angle 41.967^{\circ}(\Omega)$$

החלק המדומה של העכבה יצא חיובי, ומכאן שלמעגל יש **אופי השראִי**. הזווית של העכבה השקולה היא זווית המופע של המעגל. ניעזר בזווית זו על מנת לחשב את גורם ההספק של המעגל:

$$PF=\cos\phi=\cos(41.967^{\circ})=0.743$$

ג.

$$\overline{I}_{\mathrm{T}} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_{\mathrm{T}}} = \frac{200\angle 30°}{3.974\angle 41.967°} = 50.316\angle -11.967°(\mathrm{A})$$

$$\overline{S} = \overline{E}\cdot \overline{I}_{\mathrm{T}}^{*} = (200\angle 30°)(50.316\angle +11.967°) =$$

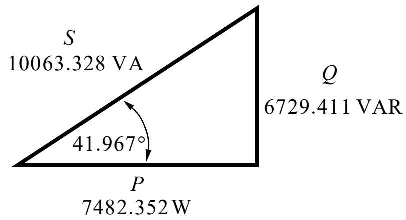
$$= 7482.352 + 6729.411j = 10063.328\angle 41.967°(\mathrm{VA})$$

נציג את תוצאות ההספקים בצורה מסודרת ואת משולש ההספקים:

$$P = 7482.352(\mathrm{W})$$

$$Q = 6729.411(\mathrm{VAR})$$

$$S = 10063.328(\mathrm{VA})$$



ד. מתח אפס מתקבל במצב של גשר ויטסטון מאוזן. נחשב בעזרת הנוסחה לגשר מאוזן (כפל בהצלבה של העכבות):

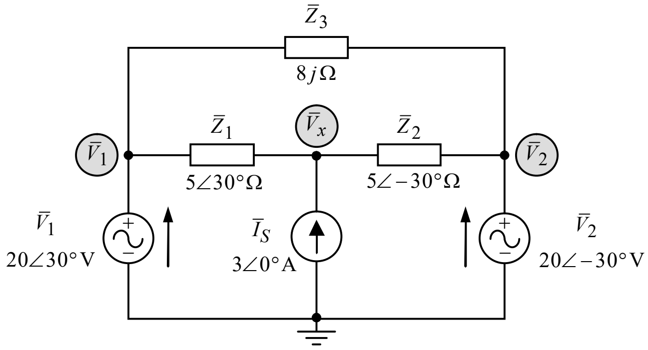
$$\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_4 = \overline{Z}_2\cdot\overline{Z}_3$$

$$(1+2j)\cdot\overline{Z}_4 = (4+8j)(2-2j)$$

$$\overline{Z}_4 = \frac{(4+8j)(2-2j)}{1+2j} = 8-8j(\Omega)$$

שאלה 7

א.



מתחי שני הצמתים הצדדיים ידועים, וכפי שסומן מראש על גבי המעגל (מתחים אלה התקבלו על ידי הליכה במסלול מתחים, מצמתים אלה לאדמה). נשאר לחשב את $\bar{V}_x$. נפתור במתחי צמתים. נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף לצומת:

שלב א':

$$\bar{I}_{Z_1} + \bar{I}_{Z_2} + \bar{I}_{\text{X}} = 0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד הזרם של מקור הזרם):

שלב ב':

$$\frac{\bar{V}_x - \bar{V}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_x - \bar{V}_2}{\bar{Z}_2} - \bar{I}_S = 0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג':

$$\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}\right)\bar{V}_x = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} + \bar{I}_S$$

נציב ערכים:

שלב ד':

$$\left(\frac{1}{5\angle 30°} + \frac{1}{5\angle -30°}\right)\bar{V}_x = \frac{20\angle 30°}{5\angle 30°} + \frac{20\angle -30°}{5\angle -30°} + 3\angle 0°$$

פתרון המשוואה נותן:

$$\bar{V}_x = 31.754\angle 0°(\text{V})$$

ב. נחשב את הזרמים העוברים דרך העכבות $\bar{Z}_1$ ו- $\bar{Z}_3$. נניח כי כיוון שני זרמים אלה הוא ימינה דרך כל עכבה (ב-AC ניתן להניח כיווני זרמים כרצוננו, אם אין אילוץ אחר בשאלה). הדבר אומר למשל, שבחישוב הזרם דרך $\bar{Z}_1$ אנו נחסר $\bar{V}_1 - \bar{V}_x$ ולא להיפך. מכאן:

$$\bar{I}_{Z_1} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_x}{\bar{Z}_1} = \frac{20\angle 30° - 31.754}{5\angle 30°} = 3.511\angle 115.284°(\text{A})$$

$$\bar{I}_{Z_3} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{Z_3} = \frac{20\angle 30° - 20\angle -30°}{8j} = 2.5(\text{A})$$

היות וקבענו שני זרמים אלה בכיוון ימין, על פי חוק הזרמים לצומת שמעל $\bar{V}_1$ מתקבל:

$$\bar{I}_{V_1} = \bar{I}_{Z_1} + \bar{I}_{Z_3} = 3.511\angle 115.284° + 2.5 = 3.329\angle 72.519°(\text{A})$$

נחשב את שלושת ההספקים של $\bar{V}_1$:

$$\bar{S}_{V_1} = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_{V_1}^* = (20\angle 30°)(3.329\angle -72.519°) = 49.074 - 45j = 66.583\angle -42.519°(\text{VA})$$

מכאן:

$P = 49.074(\mathrm{W})$

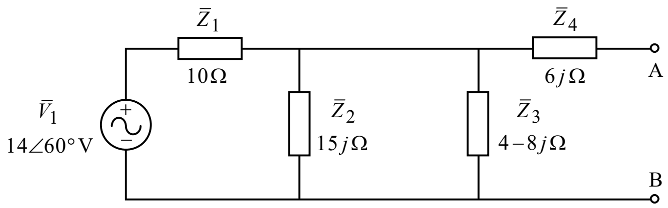
$Q = 45(\mathrm{VAR})$

$S = 66.583(\mathrm{VA})$

שאלה 8

א. **חישוב מתח תבנין:**

ננתק את $\bar{Z}_L$ ונשרטט את המעגל המתקבל:

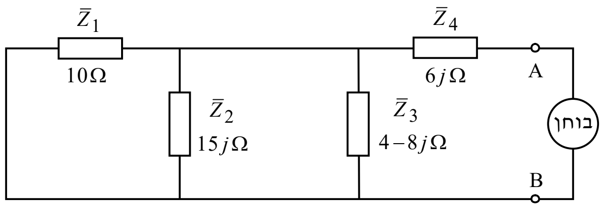


לשם נוחות הפתרון הצגנו את ההתנגדויות השונות של המעגל כעכבות. מתח תבנין הוא המתח בין A ל-B. מסלול מתחים פשוט בין נקודות אלו, מראה שזהו המתח על $\bar{Z}_3$ (העכבה $\bar{Z}_4$ מנותקת כעת, ולכן המתח שלה אפס). נוכל לחשב מתח זה בקלות בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{E}_{\text{Th}} = \bar{U}_{\text{AB}} = \frac{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}} = \frac{\frac{14\angle 60°}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15j}+\frac{1}{4-8j}} = 9.111\angle 47.471°(\text{V})$$

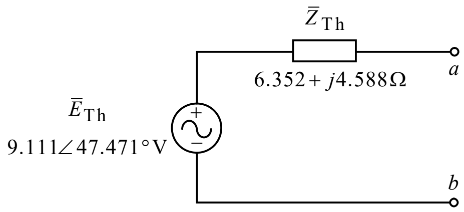
חישוב עכבת תבנין:

נקצר את מקור המתח, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$\bar{Z}_{\text{Th}} = \left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}\right)^{-1} + \bar{Z}_4 = \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15j}+\frac{1}{4-8j}\right)^{-1} + 6j = 6.352+4.588j(\Omega)$$

נשרטט את המעגל תבנין שקיבלנו כנדרש בשאלה:



ב. התנאי להעברת הספק מקסימלי במקרה זה בו העומס מרוכב הוא:

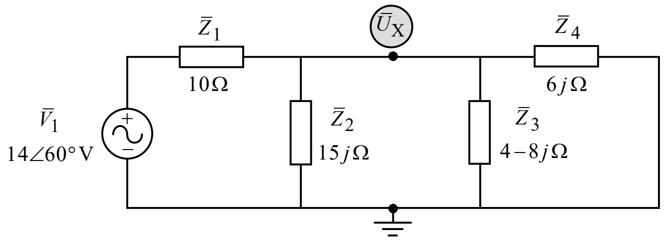
$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{\text{Th}}^{*} = 6.352 - j4.588(\Omega)$$

נחבר את העומס $\bar{Z}_L$ למעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את ההספק המקסימלי. המושג "הספק מקסימלי" מתייחס להספק הפעיל P בלבד, כמובא בשאלה. זהו ההספק המתפתח על הרכיב ההתנגדותי של עכבת העומס. מכאן:

$$\bar{I}_{Z_L} = \frac{\bar{E}_{\text{Th}}}{\bar{Z}_{\text{Th}}+\bar{Z}_L} = \frac{9.111\angle 47.471°}{6.352+j4.588+6.352-j4.588} = 0.717\angle 47.471°(\text{A})$$

$$P_{Z_L} = I_{Z_L}^{\;2} \cdot R_{(Z_L)} = 0.717^2 \cdot 6.352 = 3.266(\text{W})$$

ג. ניתן להיעזר במעגל תבנין שקיבלנו לצורך פתרון סעיף זה, על ידי חיבור חוק הקצר בין A ל-B, ״וייבוא״ תוצאת הזרם דרכו למעגל המקורי. כמו כן ניתן לפתור על ידי חישוב עכבה שקולה, או על ידי מילמן. נבחר לפתור בעזרת משפט מילמן. נשרטט את המעגל המתקבל:



$$\bar{U}_X=\frac{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}+\frac{1}{\bar{Z}_4}}=\frac{\frac{14\angle 60°}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15j}+\frac{1}{4-8j}+\frac{1}{6j}}=6.975\angle 101.633°(\mathrm{V})$$

נחשב את הזרם של המקור ואת ההספקים שלו:

$$\bar{I}_{V_1}=\frac{\bar{V}_1-\bar{U}_X}{\bar{Z}_1}=\frac{14\angle 60°-6.975\angle 101.633°}{10}=0.993\angle 32.189°(\mathrm{A})$$

$$\bar{S}_{V_1}=\bar{V}_1\cdot\bar{I}_{V_1}^{*}=(14\angle 60°)(0.993\angle -32.189°)=12.300+6.488j=13.907\angle 27.810°(\mathrm{VA})$$

מכאן:

$$P=12.300(\mathrm{W})$$

$$Q=6.488(\mathrm{VAR})$$

$$S=13.907(\mathrm{VA})$$

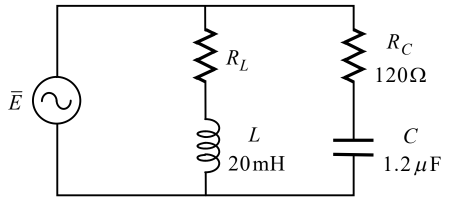
שאלה 9

א.

$R_{L(20°C)} = 60\Omega$

$\alpha = 0.012\left(\frac{1}{°C}\right)$

$f = 400Hz$



מתוך הנוסחאון:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{20\times10^{-3}}{1.2\times10^{-6}}} = 129.099(\Omega)$$

הערה: לקביעה המובאת בסעיף זה שהמעגל בטמפרטורת החדר אין קשר ברור לפתרון.

ב. ניתן לפתור על ידי הצבה בנוסחה **לתדר תהודה** עבור מעגל מסוג זה, ולבודד את הנגד המבוקש. אולם מבחינה מתמטית יהיה יותר נוח לעבוד עם הנוסחה **לתנאי התהודה** עבור מעגל מסוג זה:

$$\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

התדר נתון בשאלה (400Hz). נחשב את היגבי הסליל והקבל (יש לשים לב שבסוג תהודה זה, היגבי הקבל והסליל אינם בהכרח שווים):

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi 400\cdot 20\times10^{-3} = 50.265(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi 400\cdot 1.2\times10^{-6}} = 331.572(\Omega)$$

נציב ערכים בנוסחה לתנאי התהודה לעיל:

$$\frac{331.572}{120^2 + 331.572^2} = \frac{50.265}{R_L^2 + 50.265^2}$$

$$2.666\times10^{-3} = \frac{50.265}{R_L^2 + 50.265^2}$$

$$R_L^2 + 50.265^2 = \frac{50.265}{2.666\times10^{-3}}$$

$$R_L = 127.761(\Omega)$$

ג. ניעזר במשוואה לתלות ההתנגדות בטמפרטורה:

$$R_{(T)} = R_{T_0}\left[1 + \alpha_{T_0}\left(T - T_0\right)\right]$$

$$127.761 = 60\left[1 + 0.012(T - 20)\right]$$

$$T = 114.113(°C)$$

שאלה 10

א. **הערה:** הנתונים הקשורים להתנגדויות של הסלילים הם מיותרים ואינם נצרכים לפתרון השאלה, כמובא בהודעת התיקון של מה"ט למועד זה.

נרכז נתונים:

$$\ell_c = 400(\mathrm{mm}) = 400\times10^{-3}(\mathrm{m})$$

$$\ell_g = 0.8(\mathrm{mm}) = 0.8\times10^{-3}(\mathrm{m})$$

$$A = 2\left(\mathrm{cm}^2\right) = 2\times10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right)$$

$$\mu_r = 3000$$

$$N_1 = 500$$

$$N_2 = 300$$

$$I_1 = I_2 = I_S = 4(\mathrm{A})$$

המעגל המגנטי בשאלה זו מכיל שני מיאונים – מיאון הליבה ומיאון חריץ האוויר. נחשב את מיאוני המעגל:

$$R_{m_c} = \frac{\ell_c}{\mu_0\mu_r A} = \frac{400\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot3000\cdot2\times10^{-4}} = 530.516\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0 \cancel{\mu_r} A} = \frac{0.8\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot2\times10^{-4}} = 3.183\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_\mathrm{T}} = R_{m_c} + R_{m_g} = 530.516\times10^3 + 3.183\times10^6 = 3.713\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

את ההשראות של כל סליל נחשב בעזרת הנוסחה הבאה:

$$L = \frac{N^2}{R_\mathrm{m}}$$

כאשר יש במעגל כמה סלילים, יש להציב את R_m ש"רואה" כל סליל. במקרה שלנו כל סליל "רואה" את אותו המיאון – המיאון הכללי של המעגל. מכאן:

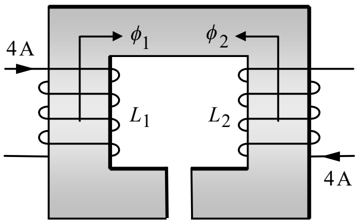
$$L_1 = \frac{{N_1}^2}{R_{m_\mathrm{T}}} = \frac{500^2}{3.713\times10^6} = 67.319(\mathrm{mH})$$

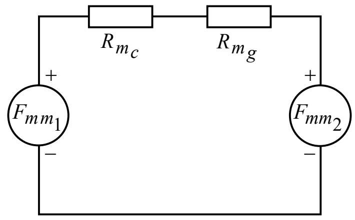
$$L_2 = \frac{{N_2}^2}{R_{m_\mathrm{T}}} = \frac{300^2}{3.713\times10^6} = 24.235(\mathrm{mH})$$

הערה: ביאור מלא אודות מעגל מגנטי הכולל יותר מסליל אחד ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלים מגנטיים.

ב. על פי כלל יד ימין לסולנואיד, שני הסלילים יוצרים שטפים בכיוון מעלה.

ג. נשרטט את המעגל המגנטי המקורי, ובצידו את "המעגל החשמלי" האנלוגי למעגל המגנטי:





ביאור: את המעגל המגנטי המקורי שרטטנו ללא מקור הזרם (ציינו את הגודל והכיוון של הזרם המתקבל עבור כל סליל). כיווני השטפים התקבלו כאמור על פי כלל יד ימין לסולנואיד.

במעגל האנלוגי שבצד ימין של האיור, כל סליל מיוצג בעזרת כמ"מ. כיוון הכמ"מ של כל סליל נקבע בהתאם לכיוון השטף שהוא יוצר.

נחשב את הכמ"מ של כל סליל:

$$F_{mm_1} = N_1 \cdot I_1 = 500 \cdot 4 = 2000(\mathrm{AT})$$

$$F_{mm_2} = N_2 \cdot I_2 = 300 \cdot 4 = 1200(\mathrm{AT})$$

נחשב את השטף הכללי (בדומה לחישוב זרם במעגל חשמלי):

$$\phi_{\mathrm{T}} = \frac{F_{mm_1} - F_{mm_2}}{R_{m_{\mathrm{T}}}} = \frac{2000-1200}{3.713\times10^6} = 215.423(\mu\,\mathrm{Wb})$$

כיוון השטף הכללי הוא ככיוון המאולץ על ידי הכמ"מ הגדול יותר מבין השניים – **עם כיוון השעון**.

הערה: ניתן היה לחשב את השטף הכללי על ידי חישוב השטף הנוצר על ידי כל סליל בנפרד, ואז לחסר בסופרפוזיציה. אולם מכיוון שאין לנו צורך בשאלה זו בשטף של כל סליל בנפרד, העדפנו את הדרך הראשונה.

ד.

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = 1\sqrt{67.319\mathrm{m} \cdot 24.235\mathrm{m}} = 40.391(\mathrm{mH})$$