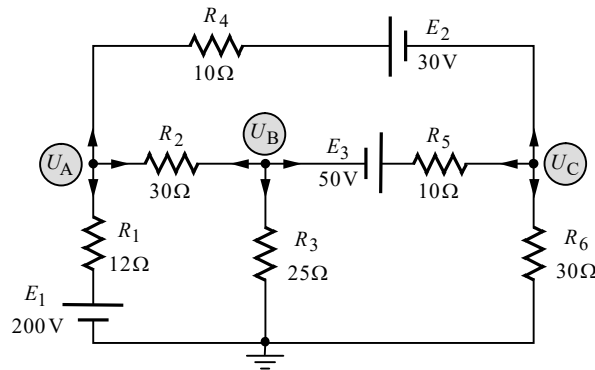


פתרון מלא לבחינת מה"ט בתורת החשמל – קיץ 2021 מועד ב'

שאלה 1

א. נפתור במתחי צמתים. נשרטט את המעגל המתקבל:



הנחנו כתמיד שכל הזרמים יוצאים מכל צומת וצומת. נמצא את משוואות הצמתים.

צומת A:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A:

(A) $I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_4} = 0$ **שלב א':**

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

(A) $\frac{U_A - E_1}{R_1} + \frac{U_A - U_B}{R_2} + \frac{U_A - E_2 - U_C}{R_4} = 0$ **שלב ב':**

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

(A) $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)U_A - \left(\frac{1}{R_2}\right)U_B - \left(\frac{1}{R_4}\right)U_C = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_4}$ **שלב ג':**

נציב ערכים:

(A) $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10}\right)U_A - \left(\frac{1}{30}\right)U_B - \left(\frac{1}{10}\right)U_C = \frac{200}{12} + \frac{30}{10}$ **שלב ד':**

צומת B:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B:

(B) $I'_{R_2} + I_{R_3} + I_{R_5} = 0$ **שלב א':**

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

(B) $\frac{U_B - U_A}{R_2} + \frac{U_B - 0}{R_3} + \frac{U_B - (-E_3) - U_C}{R_5} = 0$ **שלב ב':**

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

(B) $-\left(\frac{1}{R_2}\right)U_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_B - \left(\frac{1}{R_5}\right)U_C = -\frac{E_3}{R_5}$ **שלב ג':**

נציב ערכים:

(B) $-\left(\frac{1}{30}\right)U_A + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25} + \frac{1}{10}\right)U_B - \left(\frac{1}{10}\right)U_C = -\frac{50}{10}$ **שלב ד':**

צומת C:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת C:

$$(C) \quad I'_{R_4} + I'_{R_5} + I_{R_6} = 0$$

שלב א':

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

$$(C) \quad \frac{U_C - (-E_2) - U_A}{R_4} + \frac{U_C - E_3 - U_B}{R_5} + \frac{U_C - 0}{R_6} = 0$$

שלב ב':

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

$$(C) \quad -\left(\frac{1}{R_4}\right)U_A - \left(\frac{1}{R_5}\right)U_B + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_C = \frac{E_3}{R_5} - \frac{E_2}{R_4}$$

שלב ג':

נציב ערכים:

$$(C) \quad -\left(\frac{1}{10}\right)U_A - \left(\frac{1}{10}\right)U_B + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right)U_C = \frac{50}{10} - \frac{30}{10}$$

שלב ד':

לסיכום:

קיבלנו שלוש משוואות בשלושה נעלמים:

$$\begin{cases} (A) \quad \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10}\right)U_A - \left(\frac{1}{30}\right)U_B - \left(\frac{1}{10}\right)U_C = \frac{200}{12} + \frac{30}{10} \\ (B) \quad -\left(\frac{1}{30}\right)U_A + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25} + \frac{1}{10}\right)U_B - \left(\frac{1}{10}\right)U_C = -\frac{50}{10} \\ (C) \quad -\left(\frac{1}{10}\right)U_A - \left(\frac{1}{10}\right)U_B + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right)U_C = \frac{50}{10} - \frac{30}{10} \end{cases}$$

פתרון המשוואות נתון:

$$U_A = 140(V)$$

$$U_B = 50(V)$$

$$U_C = 90(V)$$

ב. נחשב את הזרמים העוברים דרך E_1 ו- E_2 , בעזרת הביטויים שקיבלנו בשלב ב' לעיל של משוואת צומת A:

$$I_{E_1} = \frac{U_A - E_1}{R_1} = \frac{140 - 200}{12} = -5(A)$$

$$I_{E_2} = \frac{U_A - E_2 - U_C}{R_4} = \frac{140 - 30 - 90}{10} = 2(A)$$

ביטויים אלה נלקחו ממשוואת צומת A, שלגביה הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. הזרם I_{E_1} יצא שלילי, מה שאומר שכיוונו הפוך להנחה ההתחלתית – כלומר הוא נכנס אל צומת A. נמצא שהזרם דרך E_1 יוצא מהדק החיובי שלו, ולכן מקור זה ספק. הזרם I_{E_2} יצא חיובי, מה שאומר שכיוונו כהנחה ההתחלתית – כלומר הוא יוצא מצומת A. נמצא שהזרם דרך E_2 נכנס אל ההדק החיובי שלו, ולכן מקור זה צרכן.

נחשב את הזרם העובר דרך E_3 , בעזרת הביטוי שקיבלנו בשלב ב' לעיל של משוואת צומת B:

$$I_{E_3} = \frac{U_B - (-E_3) - U_C}{R_5} = \frac{50 - (-50) - 90}{10} = 1(A)$$

ביטוי זרם זה נלקח ממשוואת צומת B, שלגביה הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. קיבלנו תוצאה חיובית, מה שאומר שכיוונו של הזרם הוא כהנחה ההתחלתית – **יוצא מצומת B**. נמצא שהזרם דרך E_3 יוצא מההדק החיובי שלו, ולכן מקור זה **ספק**.

נחשב את הספקי שלושת המקורות בעזרת הזרמים שמצאנו (אנו לא נציב את הסימן השלילי של הזרמים, שכן הוא מציין כיוון בלבד, ונתון זה כבר נלקח בחשבון בקביעה מי ספק ומי צרכן):

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 200 \cdot 5 = 1000(W)$$

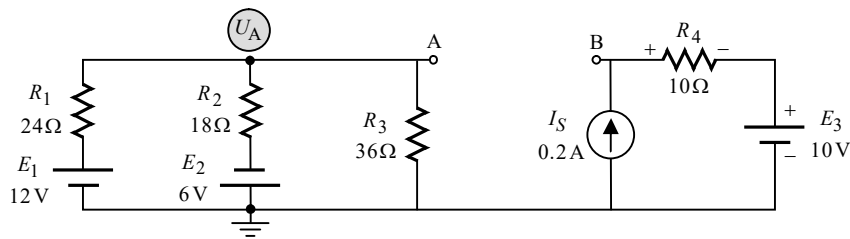
$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_{E_2} = 30 \cdot 2 = 60(W)$$

$$P_{E_3} = E_3 \cdot I_{E_3} = 50 \cdot 1 = 50(W)$$

ג. כאמור בסעיף הקודם, המקורות E_1 ו- E_3 ספקים, והמקור E_2 צרכן.

שאלה 2

א. חישוב מתח תבנין:

ננתק את R_L ונשרטט את המעגל המתקבל:

ביאור: ניתוקו של R_L גרם לכך ששני חלקי המעגל מתפקדים כשני מעגלים נפרדים, כך שלא עובר זרם מחלק אחד של המעגל לשני. מתח תבנין המבוקש הוא המתח בין A ל-B. נוכל לקבל מתח זה בעזרת מסלול מתחים בין הנקודות, העובר דרך R_3 , E_3 , R_4 . לשם כך עלינו לחשב את מתחי הנגדים שבמסלול.

בחלק הימני של המעגל המצב פשוט יותר. מדובר במעגל טורי. מקור הזרם שבמעגל מאלץ זרם בגודל ובכיוון מסוימים. מכך נגזרה קוטביות המתח על R_4 שסומנה מראש על גבי השרטוט (בנגד, נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). נוכל לחשב בקלות את המתח הנופל על R_4 :

$$U_{R_4} = I_S \cdot R_4 = 0.2 \cdot 10 = 2(\text{V})$$

נשאר לנו לחשב את המתח הנופל על R_3 במעגל שבצד שמאל. מעגל זה מכיל שני מקורות מתח, ולכן יש צורך להיעזר בשיטה לפתרון מעגלים. נוכל לקבל את המתח המבוקש בקלות בעזרת משפט מילמן:

$$U_{R_3} = U_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{12}{24} - \frac{6}{18}}{\frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}} = 1.333(\text{V})$$

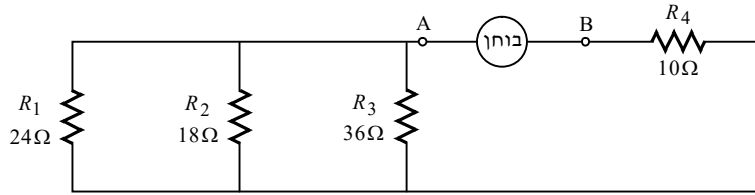
קיבלנו תוצאה חיובית, מה שאומר שהצד העליון של R_3 מקבל סימן חיובי. נחשב את E_{Th} :

$$E_{Th} = U_{R_3} - E_3 - U_{R_4} = 1.333 - 10 - 2 = -10.666(\text{V})$$

התוצאה השלילית שקיבלנו עבור E_{Th} אומרת, שיש לחברו כך שההדק החיובי שלו יפנה אל נקודה B (הנקודה שבה סיימנו את מסלול המתחים). תהיה לדבר חשיבות בסעיף ג'.

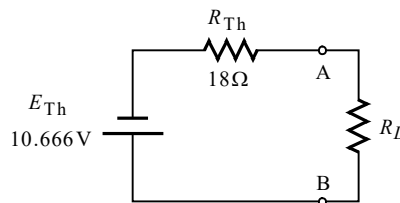
חישוב התנגדות תבנית:

נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחר בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$R_{Th} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} + R_4 = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \right)^{-1} + 10 = 18(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנית המתקבל:



ב. התנאי להעברת הספק מקסימלי במעגלי DC הוא:

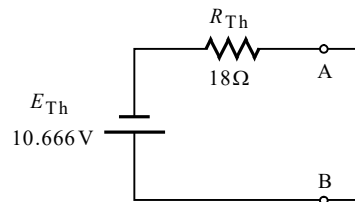
$$R_L = R_{Th} = 18(\Omega)$$

נוכל לחשב את ההספק של R_L בקלות בעזרת מעגל תבנית שקיבלנו:

$$I_{R_L} = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{10.666}{18 + 18} = 0.296(A)$$

$$P_{R_L} = I_{R_L}^2 \cdot R_L = 0.296^2 \cdot 18 = 1.580(W)$$

ג.



כיוונו של E_{Th} גורם לזרם מ-B ל-A, כמתואר באיור (ראה על קביעת כיוונו של E_{Th} לעיל סעיף א'). נחשב את גודל הזרם:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{10.666}{18} = 0.592(A)$$

שאלה 3

א. נרכז נתונים. נתוני תא בודד :

$$E = 2(\text{V})$$

$$r = 0.6(\Omega)$$

$$Q = 300(\text{mAh})$$

הערכים הנקובים של R_L :

$$U_{R_L} = 15(\text{V})$$

$$P_{R_L} = 150(\text{W})$$

נחשב את R_L :

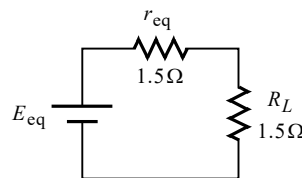
$$P_{R_L} = \frac{U_{R_L}^2}{R_L} \Rightarrow$$

$$R_L = \frac{U_{R_L}^2}{P_{R_L}} = \frac{15^2}{150} = 1.5(\Omega)$$

נדרש שיועבר הספק מקסימלי ל- R_L . מכאן :

$$r_{\text{eq}} = R_L = 1.5(\Omega)$$

נשרטט מעגל שקול :

מכיוון ששני הנגדים שווים, המתח השקול E_{eq} מתחלק ביניהם בשווה. המתח הנתון של R_L הוא 15V. מכאן :

$$E_{\text{eq}} = 2 \cdot 15 = 30(\text{V})$$

בשאלה מבקשים לדעת כיצד נחבר את התאים על מנת להגיע לתוצאות שקיבלנו. במילים אחרות – עלינו לחשב את n ו- m . את n נוכל לחשב על ידי הנוסחה למתח השקול של מערך התאים :

$$E_{\text{eq}} = nE \Rightarrow$$

$$n = \frac{E_{\text{eq}}}{E} = \frac{30}{2} = 15$$

את m נוכל לחשב על ידי הנוסחה להתנגדות השקולה של מערך התאים :

$$r_{\text{eq}} = \frac{nr}{m} \Rightarrow$$

$$m = \frac{nr}{r_{\text{eq}}} = \frac{15 \cdot 0.6}{1.5} = 6$$

ב. ההספק המתבזבז בתוך הסוללה, הוא גם ההספק של ההתנגדות השקולה של התאים r_{eq} . מכאן:

$$P_{r_{eq}} = \frac{U_{r_{eq}}^2}{r_{eq}} = \frac{15^2}{1.5} = 150(\text{W})$$

הערה: תוצאה זו הייתה למעשה ידועה מראש, שהרי ל- r_{eq} ול- R_L אותה התנגדות ואותו המתח, ולכן יכולנו לומר מראש שההספק של r_{eq} שווה להספק הנתון של R_L . מכל מקום לא נמנענו מלהציג דרך חישובית.

ג. נחשב את ההספק של E_{eq} ואת הנצילות:

$$P_{E_{eq}} = P_{r_{eq}} + P_{R_L} = 150 + 150 = 300(\text{W})$$

$$\eta = \frac{P_{R_L}}{P_{E_{eq}}} \cdot 100\% = \frac{150}{300} \cdot 100\% = 50\%$$

הערה: נצילות המעגל במצב של הספק מקסימלי **במערך של תאים זהים** היא תמיד 50%. אולם יש לשים לב שכלל זה אינו תמיד נכון במצב של הספק מקסימלי במעגלים "רגילים".

ד. נחשב את הזרם העובר במעגל השקול:

$$I = \frac{E_{eq}}{r_{eq} + R_L} = \frac{30}{1.5 + 1.5} = 10(\text{A})$$

נתון שהקיבול של תא בודד הוא $Q = 300(\text{mAh})$. נחשב את הקיבול השקול של מערך התאים:

$$Q_{eq} = mQ = 6 \cdot (300 \times 10^{-3}) = 1.8(\text{Ah})$$

את הזמן נחשב בעזרת הקשר הבא:

$$Q = I \cdot t \Rightarrow$$

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{1.8}{10} = 0.18(\text{h})$$

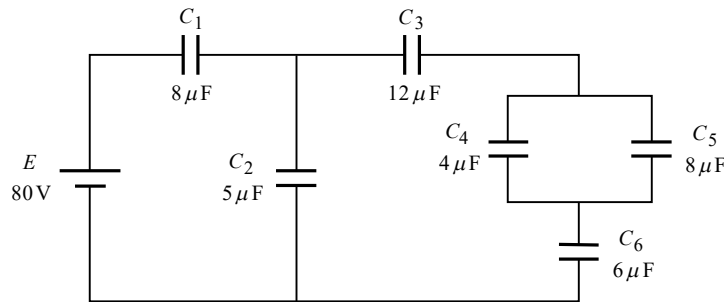
ה. במצב זה עדיין $n = 15$, אולם m השתנה והוא כעת 5. לדבר תהיה השפעה על ההתנגדות השקולה של מערך התאים r_{eq} . נחשב את הערך החדש ואת הזרם המבוקש:

$$r_{eq} = \frac{nr}{m} = \frac{15 \cdot 0.6}{5} = 1.8(\Omega)$$

$$I = \frac{E_{eq}}{r_{eq} + R_L} = \frac{30}{1.8 + 1.5} = 9.090(\text{A})$$

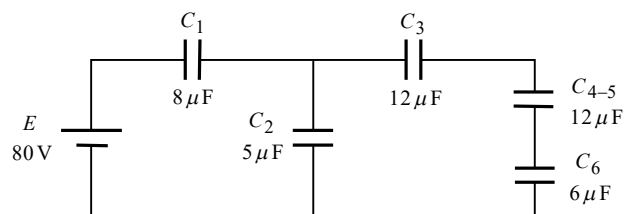
שאלה 4

א.



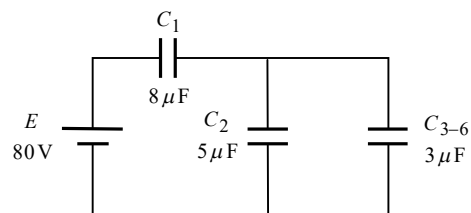
נחשב את הקיבול השקול של המעגל. אנו נשרטט גם שני שלבי ביניים של תהליך זה, שימשו אותנו הן בסעיף זה, והן בסעיף הבא.

$$C_{4-5} = C_4 + C_5 = 4\mu + 8\mu = 12(\mu F)$$



שלב א'

$$C_{3-6} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{4-5}} + \frac{1}{C_6} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{12\mu} + \frac{1}{12\mu} + \frac{1}{6\mu} \right)^{-1} = 3(\mu F)$$



שלב ב'

$$C_{2-6} = C_2 + C_{3-6} = 5\mu + 3\mu = 8(\mu F)$$

$$C_T = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2-6}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{8\mu} + \frac{1}{8\mu} \right)^{-1} = 4(\mu F)$$

ב. נחשב תחילה את המטען בכל קבל:

$$Q_{C_1} = Q_T = E \cdot C_T = 80 \cdot 4\mu = 320(\mu C)$$

נפעיל את כלל מחלק המטען על שלב ב' לעיל:

$$Q_{C_2} = \frac{Q_{C_1} \cdot C_2}{C_2 + C_{3-6}} = \frac{320\mu \cdot 5\mu}{5\mu + 3\mu} = 200(\mu C)$$

$$Q_{C_{3-6}} = Q_{C_1} - Q_{C_2} = 320\mu - 200\mu = 120(\mu C)$$

מהתבוננות בשלב א' לעיל נקבל כי:

$$Q_{C_3} = Q_{C_{4-5}} = Q_{C_6} = Q_{C_{3-6}} = 120(\mu C)$$

נפעיל את כלל מחלק המטען על קבלים C_4 ו- C_5 :

$$Q_{C_4} = \frac{Q_{C_{3-6}} \cdot C_4}{C_4 + C_5} = \frac{120\mu \cdot 4\mu}{4\mu + 8\mu} = 40(\mu C)$$

$$Q_{C_5} = Q_{C_{3-6}} - Q_{C_4} = 120\mu - 40\mu = 80(\mu C)$$

ניעזר בערכי המטען שקיבלנו, ונחשב את המתח על כל קבל :

$$U_{C_1} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{320\mu}{8\mu} = 40(V)$$

$$U_{C_2} = \frac{Q_{C_2}}{C_2} = \frac{200\mu}{5\mu} = 40(V)$$

$$U_{C_3} = \frac{Q_{C_3}}{C_3} = \frac{120\mu}{12\mu} = 10(V)$$

$$U_{C_4} = U_{C_5} = \frac{Q_{C_{4-5}}}{C_{4-5}} = \frac{120\mu}{12\mu} = 10(V)$$

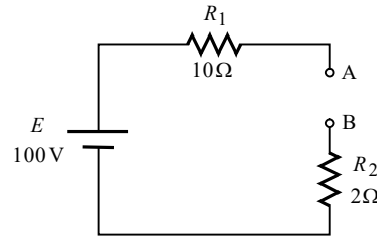
$$U_{C_6} = \frac{Q_{C_6}}{C_6} = \frac{120\mu}{6\mu} = 20(V)$$

.ג

$$W_T = \frac{C_T \cdot E^2}{2} = \frac{4\mu \cdot 80^2}{2} = 12.8(mJ)$$

שאלה 5

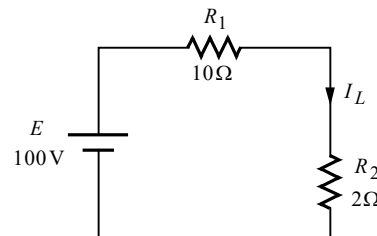
א. מיד לאחר סגירת המפסק הסליל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על הדקי הסליל הוא המתח בין A ל-B. במעגל שקיבלנו אין מסלול סגור, ולכן המתח על הנגדים הוא אפס. מסלול מתחים בין A ל-B נותן:

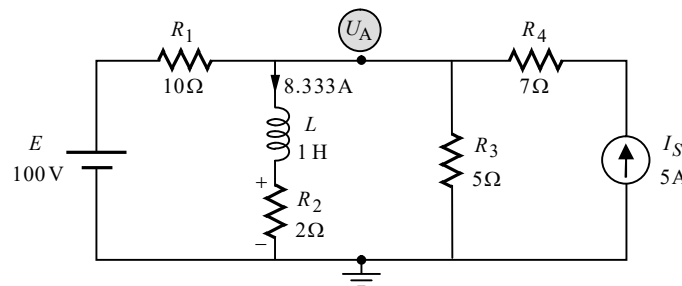
$$U_L = U_{AB} = E = 100(V)$$

במצב המתמיד הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל, ונחשב את הזרם דרך הסליל:



$$I_L = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{10 + 2} = 8.333(A)$$

ב. לסליל יש תכונה שהוא **שומר על רציפות הזרם דרכו**. הלכך, מיד לאחר סגירת המפסק S_2 , הזרם בסליל יישאר באותו גודל ובאותו כיוון, כפי שהיה רגע לפני סגירת המפסק, כלומר 8.333A בכיוון מטה (התקבל בסעיף הקודם). נשרטט את המעגל החדש, ונציין על גביו את הידוע לנו:



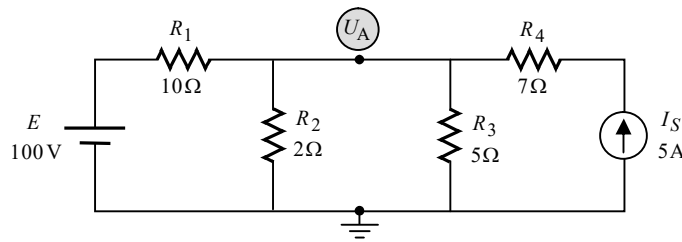
נפתור במילמן, כאשר זרם הסליל משמש לנו כזרם נתון אותו נציב במשוואה, זאת בדומה לזרם של מקור הזרם. לפיכך, הנגד R_2 לא יופיע במשוואה, בדומה לנגד R_4 שעל הענף של מקור הזרם. מכאן:

$$U_A = \frac{\frac{E}{R_1} - I_L + I_S}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{100}{10} - 8.333 + 5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = 22.222(V)$$

נחשב את המתח על הסליל, בעזרת מסלול מתחים בין הדקיו, העובר דרך R_3 ו- R_2 . המתח על R_3 הוא U_A שמצאנו. קוטביות המתח על R_2 סומנה מראש על גבי השרטוט, והיא נקבעה בהתאם לכיוון הזרם דרכו. מכאן:

$$U_L = U_A - U_{R_2} = U_A - I_L \cdot R_2 = 22.222 - 8.333 \cdot 2 = 5.555(V)$$

במצב המתמיד הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



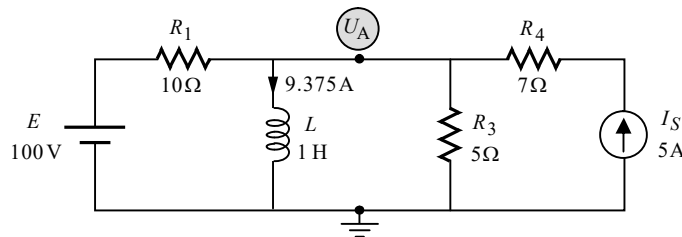
נפתור במילמן:

$$U_A = \frac{\frac{E}{R_1} + I_S}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{100}{10} + 5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = 18.75(\text{V})$$

הזרם דרך הסליל הוא הזרם דרך R_2 . מכאן:

$$I_L = I_{R_2} = \frac{U_A}{R_2} = \frac{18.75}{2} = 9.375(\text{A})$$

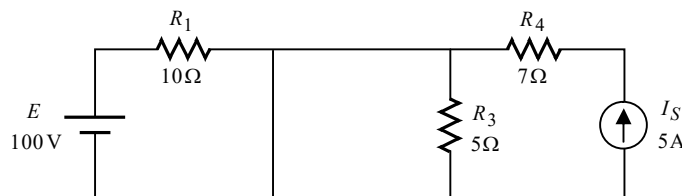
ג. מיד לאחר סגירת המפסק S_3 , הזרם בסליל יישאר באותו גודל ובאותו כיוון, כפי שהיה רגע לפני סגירת המפסק, כלומר 9.375A בכיוון מטה (התקבל בסעיף הקודם). סגירת S_3 מקצרת את R_2 . נשרטט את המעגל החדש, ונציין על גביו את הידוע לנו:



המתח על הסליל הוא U_A . נפתור במילמן באופן דומה לסעיף הקודם:

$$U_L = U_A = \frac{\frac{E}{R_1} - I_L + I_S}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{100}{10} - 9.375 + 5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = 18.75(\text{V})$$

במצב המתמיד הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



נוכל לקבל את זרם הסליל בקלות בעזרת סופרפוזיציה. יש לשים לב שכאשר בוחנים את תרומתו של כל מקור בנפרד, הקצר הקיים במקום הסליל מקצר את חלק המעגל שמהצד השני.

תרומת מקור המתח:

כאמור הקצר יוצר עבורו מעגל שבו יש רק את מקור המתח ו- R_1 . מכאן:

$$I'_L = I_{R_1} = \frac{E}{R_1} = \frac{100}{10} = 10(\text{A})$$

תרומת מקור הזרם:

חוט הקצר מקצר את R_3 . הלכך כל הזרם של מקור הזרם ממשיך אל הסליל. מכאן:

$$I''_L = I_S = 5(\text{A})$$

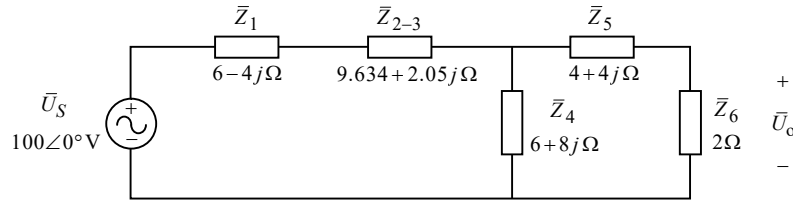
לשתי תרומות הזרם אותו הכיוון. נחבר בין התרומות ונקבל:

$$I_L = I'_L + I''_L = 10 + 5 = 15(\text{A})$$

שאלה 6

א. נחשב את העכבה השקולה של \bar{Z}_2 ו- \bar{Z}_3 ונשרטט את המעגל המתקבל:

$$\bar{Z}_{2-3} = \bar{Z}_2 \parallel \bar{Z}_3 = \left(\frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10+10j} + \frac{1}{15-8j} \right)^{-1} = 9.364 + 2.05j (\Omega)$$



לשם בהירות ההצגה של דרך הפתרון, הנגד R_L סומן כעכבה \bar{Z}_6 . המתח המבוקש \bar{U}_o הוא המתח על \bar{Z}_6 . נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_{4-6} = \bar{Z}_4 \parallel (\bar{Z}_5 + \bar{Z}_6) = \left(\frac{1}{\bar{Z}_4} + \frac{1}{\bar{Z}_5 + \bar{Z}_6} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6+8j} + \frac{1}{4+4j+2} \right)^{-1} = 3.166 + 2.833j (\Omega)$$

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{2-3} + \bar{Z}_{4-6} = 6 - 4j + 9.364 + 2.05j + 3.166 + 2.833j = 18.530 + 0.884j (\Omega)$$

נחשב את הזרם הכללי של המעגל:

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{U}_S}{\bar{Z}_T} = \frac{100 \angle 0^\circ}{18.530 + 0.884j} = 5.390 \angle -2.731^\circ (\text{A})$$

נחשב את הזרם דרך \bar{Z}_6 בעזרת כלל מחלק הזרם, ואת המתח \bar{U}_o :

$$\bar{I}_{Z_{5-6}} = \frac{\bar{I}_T \cdot \bar{Z}_4}{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_{5-6}} = \frac{(5.390 \angle -2.731^\circ) \cdot (6+8j)}{6+8j+4+4j+2} = 3.176 \angle 5.398^\circ (\text{A})$$

$$\bar{U}_o = \bar{I}_{Z_{5-6}} \cdot \bar{Z}_6 = (3.176 \angle 5.398^\circ) \cdot 2 = 6.352 \angle 5.398^\circ (\text{V})$$

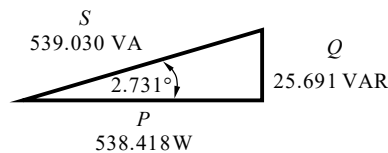
ב.

$$\bar{S} = \bar{U}_S \cdot \bar{I}_T^* = (100 \angle 0^\circ)(5.390 \angle +2.731^\circ) = 538.418 + 25.691j = 539.030 \angle 2.731^\circ (\text{VA})$$

$$P = 538.418 (\text{W})$$

$$Q = 25.691 (\text{VAR})$$

$$S = 539.030 (\text{VA})$$



ג. נמיר את הזמן ליחידת מדידה של שניות (על ידי הכפלת הזמן הנתון ב-60) ונחשב את האנרגיה:

$$W = P \cdot t = 538.418 \cdot (5 \times 60) = 161525.426 (\text{J})$$

הערה: יחידת המדידה ג'אול מתקבלת על ידי הצבת ההספק בוואט, והזמן בשניות, וכפי שחישבנו.

שאלה 7

א. נחשב תחילה את היגבי הקבל והסלילים :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10000 \cdot 10 \times 10^{-6}} = 10(\Omega)$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 10000 \cdot 0.5 \times 10^{-3} = 5(\Omega)$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 10000 \cdot 1 \times 10^{-3} = 10(\Omega)$$

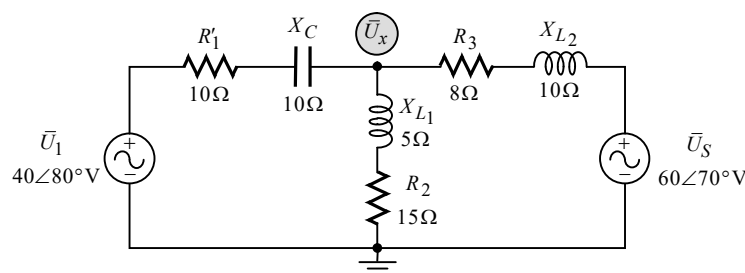
ניתן לפתור בקלות את כל סעיפי השאלה בשיטת מתחי צמתים. ישנם שני צמתים במעגל (מלבד האדמה). אולם כידוע, נכון לזמן כתיבת שורות אלו, המחשבוני המצויים אצל רוב ככל התלמידים אינם מסוגלים לפתור מטריצה עם מספרים מרוכבים, ולכן עלינו יהיה לנקוט בגישה מעט שונה – נמיר את מקור הזרם למקור מתח וכך "נחסוך" צומת. נחשב את רכבו של מקור המתח החדש :

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_S \cdot R_1 = (4 \angle 80^\circ) \cdot 10 = 40 \angle 80^\circ (\text{V})$$

הנגד שיהיה בטור למקור המתח החדש הוא :

$$R'_1 = R_1 = 10(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל :



נפתור במילמן :

$$\bar{U}_x = \frac{\frac{\bar{U}_1}{R'_1 - jX_C} + \frac{\bar{U}_S}{R_3 + jX_{L2}}}{\frac{1}{R'_1 - jX_C} + \frac{1}{R_2 + jX_{L1}} + \frac{1}{R_3 + jX_{L2}}} = \frac{\frac{40 \angle 80^\circ}{10 - j10} + \frac{60 \angle 70^\circ}{8 + j10}}{\frac{1}{10 - j10} + \frac{1}{15 + j5} + \frac{1}{8 + j10}} = 29.317 \angle 64.607^\circ (\text{V})$$

ב.

$$\bar{I}_{U_S} = \frac{\bar{U}_S - \bar{U}_x}{R_3 + jX_{L2}} = \frac{60 \angle 70^\circ - 29.317 \angle 64.607^\circ}{8 + j10} = 2.415 \angle 23.769^\circ (\text{A})$$

$$\bar{S}_{U_S} = \bar{U}_S \cdot \bar{I}_{U_S}^* = (60 \angle 70^\circ)(2.415 \angle -23.769^\circ) = 100.261 + j104.661 = 144.936 \angle 46.230^\circ (\text{VA})$$

מכאן :

$$P_{U_S} = 100.261 (\text{W})$$

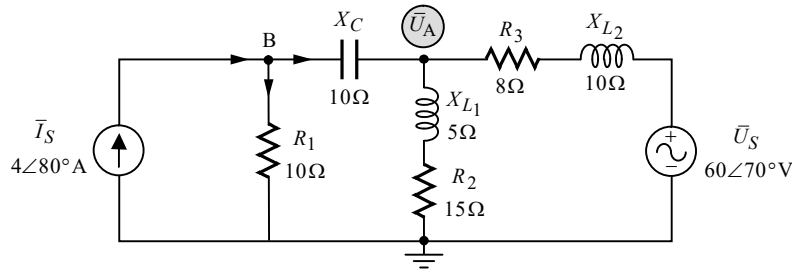
$$Q_{U_S} = 104.661 (\text{VAR})$$

$$S_{U_S} = 144.936 (\text{VA})$$

ג. נחשב תחילה את זרם הקבל:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_x}{R'_1 - jX_C} = \frac{40\angle 80^\circ - 29.317\angle 64.607^\circ}{10 - j10} = 0.995\angle 158.55^\circ (\text{A})$$

זרם הקבל חושב על סמך ההנחה שכיוונו ימינה. נחזור כעת אל המעגל המקורי:



הזרם דרך הקבל במעגל המקורי זהה לזרם הקבל שחישבנו, שהרי הקבל "שמר" על מקומו המקורי (אולם הזרם על R'_1 אינו הזרם על R_1 המקורי, שהרי נגד זה שינה את מקומו. בשל כך הנגד החדש סומן כ- R'_1 , וזאת על מנת להבדילו מ- R_1 המקורי). נחשב את הזרם דרך R_1 על פי חוק הזרמים לצומת B מתקבל:

$$\bar{I}_S = \bar{I}_C + \bar{I}_{R_1} \Rightarrow$$

$$\bar{I}_{R_1} = \bar{I}_S - \bar{I}_C = 4\angle 80^\circ - 0.995\angle 158.55^\circ = 3.925\angle 65.607^\circ (\text{A})$$

נחשב את המתח של \bar{I}_S ואת ההספקים שלו:

$$\bar{U}_{I_S} = \bar{U}_{R_1} = \bar{I}_{R_1} \cdot R_1 = (3.925\angle 65.607^\circ) \cdot 10 = 39.256\angle 65.607^\circ (\text{V})$$

$$\bar{S}_{I_S} = \bar{U}_{I_S} \cdot \bar{I}_S^* = (39.256\angle 65.607^\circ)(4\angle -80^\circ) = 152.096 - j39.031 = 157.024\angle -14.392^\circ (\text{VA})$$

מכאן:

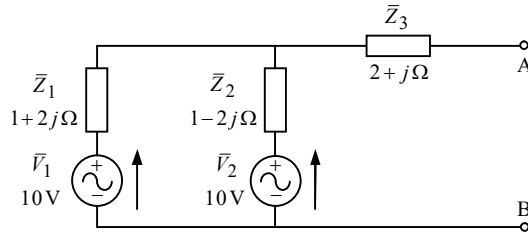
$$P_{I_S} = 152.096 (\text{W})$$

$$Q_{I_S} = 39.031 (\text{VAR})$$

$$S_{I_S} = 157.024 (\text{VA})$$

שאלה 8

א. **חישוב מתח תבנית:**

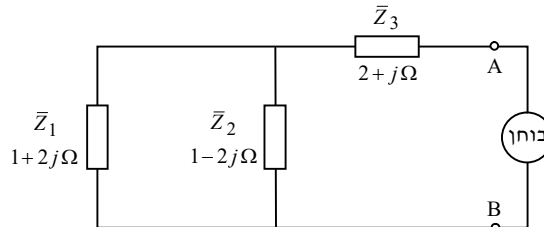


דרך \bar{Z}_3 לא זורם זרם. נוכל לחשב בקלות את מתח תבנית בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{E}_{Th} = \bar{U}_{AB} = \frac{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}} = \frac{\frac{10}{1+2j} + \frac{10}{1-2j}}{\frac{1}{1+2j} + \frac{1}{1-2j}} = 10(V)$$

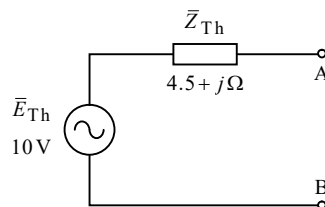
חישוב עכבת תבנית:

נקצר את מקורות המתח ונניח מקור בוחן בין A ל-B:



$$\bar{Z}_{Th} = \bar{Z}_1 \parallel \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = \left(\frac{1}{1+2j} + \frac{1}{1-2j} \right)^{-1} + 2 + j = 4.5 + j(\Omega)$$

נציג את מעגל תבנית השקול כנדרש בשאלה:



ב. נרשום את התנאי להעברת הספק מקסימלי עבור מקרה זה, ונחשב את עכבת העומס:

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{Th}^* = 4.5 - j(\Omega)$$

ג. נחבר את עכבת העומס למעגל תבנית שקיבלנו, ונחשב את ההספק הממשי של העומס:

$$\bar{I}_{Z_L} = \frac{\bar{E}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + \bar{Z}_L} = \frac{10}{4.5 + j + 4.5 - j} = 1.111(A)$$

$$P_{Z_L} = I_{Z_L}^2 \cdot R(Z_L) = 1.111^2 \cdot 4.5 = 5.555(W)$$

שאלה 9

א. הקדמה: בתהודה טורית מתקיים $X_L = X_C$. אולם זה נכון דווקא כאשר הסליל והקבל מחוברים בטור, מה שאין כן כאן. הלכך, אנו נצמצם את שני ענפי המעגל לערך שקול, כך שיתקבל קבל "חדש" המחובר בטור לסליל, וכפי שנראה.

נעביר תחילה את מתח המקור להצגה חלקית (פאזורית), ולאחר מכן נשרטט את המעגל המתקבל. מקור המתח נתון על ידי:

$$u(t) = 66\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) (\text{V})$$

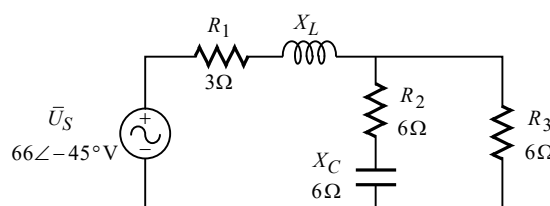
נחשב את הערך היעיל של המקור:

$$U_S = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{66\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 66 (\text{V})$$

זווית המופע של המקור נתונה ברדיאנים (כך עולה מאופן ההצגה של הזווית). נמיר את הזווית למעלות. כידוע, הזווית π ברדיאנים שקולה ל-180 מעלות. מכאן:

$$\phi = -\frac{\pi}{4} = -\frac{180^\circ}{4} = -45^\circ$$

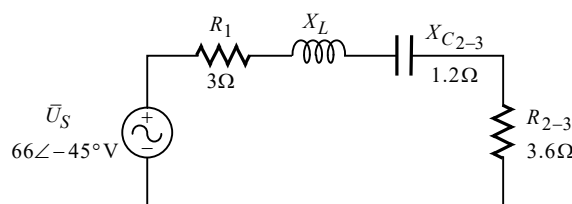
נשרטט את המעגל המתקבל:



נחשב כעת את העכבה השקולה של שני הענפים הימניים של המעגל:

$$\bar{Z}_{2-3} = \left(\frac{1}{R_2 - jX_C} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6 - 6j} + \frac{1}{6} \right)^{-1} = 3.6 - 1.2j (\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל לאחר הצמצום:



תהודה טורית במעגל שקיבלנו תתקבל עבור:

$$X_L = X_{C_{2-3}} = 1.2 (\Omega)$$

ב. נחשב את העכבה השקולה של המעגל, ואת זרמי המעגל:

$$\bar{Z}_T = R_1 + jX_L - jX_{C_{2-3}} + R_{2-3} = 3 + \cancel{j1.2} - \cancel{j1.2} + 3.6 = 6.6(\Omega)$$

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{U}_S}{\bar{Z}_T} = \frac{66\angle -45}{6.6} = 10\angle -45^\circ (\text{A})$$

$$\bar{I}_{R_2} = \frac{\bar{I}_T \cdot R_3}{R_2 - jX_C + R_3} = \frac{(10\angle -45^\circ)6}{6 - j6 + 6} = 4.472\angle -18.434^\circ (\text{A})$$

$$\bar{I}_{R_3} = \bar{I}_T - \bar{I}_{R_2} = 10\angle -45^\circ - 4.472\angle -18.434^\circ = 6.324\angle -63.434^\circ (\text{A})$$

ג. ההספק הפעיל של המעגל, הוא ההספק של החלק ההתנגדוטי של עכבת המעגל. מכאן:

$$P_T = I_T^2 \cdot R_{(Z_T)} = 10^2 \cdot 6.6 = 660(\text{W})$$

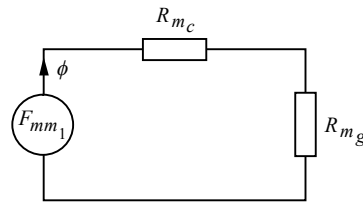
שאלה 10

א. כא"מ מושרה בסליל מתפתח רק כתוצאה משינוי בזרם/שטף (של עצמו, או של סליל מצומד אליו). במקרה שלנו L_1 מחובר למקור זרם ישר המפיק ערך קבוע של זרם, ולפיכך לא יתפתח כא"מ מושרה, לא בסליל 1, ולא בסליל 2. ובניסוח מתמטי:

$$U_{AB} = 0$$

הערה: הרחבה נוספת על נידון זה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק בכא"מ מושרה והשראות, וכן בפרק העוסק במעגלים מגנטיים.

ב. המעגל המגנטי שבשאלה הוא מעגל מגנטי טורי, הכולל 2 מיאוניים – מיאון הליבה R_{m_c} , ומיאון חריץ האוויר R_{m_g} . נציג את "המעגל החשמלי" האנלוגי למעגל המגנטי:



רק L_1 מחובר למקור אנרגיה, ולכן רק לו יש כמ"מ. נרכז נתונים:

$$\mu_r = 3000$$

$$\ell_c = 300(\text{mm}) = 300 \times 10^{-3} (\text{m})$$

$$\ell_g = 2(\text{mm}) = 2 \times 10^{-3} (\text{m})$$

$$A = 900(\text{mm}^2) = 900 \times 10^{-6} (\text{m}^2)$$

$$N_1 = 400$$

$$N_2 = 600$$

$$I_1 = 1(\text{A})$$

נחשב את מיאוני המעגל:

$$R_{m_c} = \frac{\ell_c}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{300 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 3000 \cdot 900 \times 10^{-6}} = 88.419 \times 10^3 \left(\frac{1}{\text{H}} \right)$$

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0 A} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 900 \times 10^{-6}} = 1.768 \times 10^6 \left(\frac{1}{\text{H}} \right)$$

$$R_{m_T} = R_{m_c} + R_{m_g} = 88.419 \times 10^3 + 1.768 \times 10^6 = 1.856 \times 10^6 \left(\frac{1}{\text{H}} \right)$$

רק L_1 מחובר למקור אנרגיה ולכן רק הוא יוצר שטף במעגל. נחשב את גודל השטף:

$$\phi_1 = \frac{F_{mm_1}}{R_{m_T}} = \frac{N_1 I_1}{R_{m_T}} = \frac{400 \cdot 1}{1.856 \times 10^6} = 215.423 (\mu \text{Wb})$$

על פי כלל יד ימין לסולנואיד, כיוון השטף הוא עם כיוון השעון, וכפי שסומן על גבי השרטוט לעיל.

ג.

$$B_c = B_g = \frac{\phi_1}{A} = \frac{215.423 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}} = 0.239 \text{ (T)}$$

$$H_c = \frac{B_c}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.239}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3000} = 63.492 \left(\frac{\text{A}}{\text{m}} \right)$$

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0.239}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 190476.190 \left(\frac{\text{A}}{\text{m}} \right)$$

ד. על פי כלל יד שמאל, האצבע מורה על כיוון השטף/השדה הפועל על התיל (ימינה, כפי שהובא בסעיף ב'), האמה מורה על כיוון הזרם בתיל (כלפי מעלה), והאגודל מורה על כיוון הכוח. במקרה זה כיוון הכוח יהיה – לתוך הדף.

ה. על מנת לבטל את הכוח הפועל על המוליך, יש לאפס את השטף בליבה. לשם כך, על הסליל L_2 לגרום לשטף זהה בגודלו לשטף הנוצר על ידי L_1 , והפוך בכיוונו. על פי כלל יד ימין לסולנואיד, על הזרם להיכנס בהדק B של L_2 ולצאת מהדק A (וכך הוא יגרום לשטף שכיוונו נגד כיוון השעון). נחשב את הגודל הנדרש של הזרם:

$$\phi_2 = \frac{N_2 I_2}{R_{mT}} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{\phi_2 \cdot R_{mT}}{N_2} = \frac{\phi_1 \cdot R_{mT}}{N_2} = \frac{215.423 \times 10^{-6} \cdot 1.856 \times 10^6}{600} = 0.666 \text{ (A)}$$