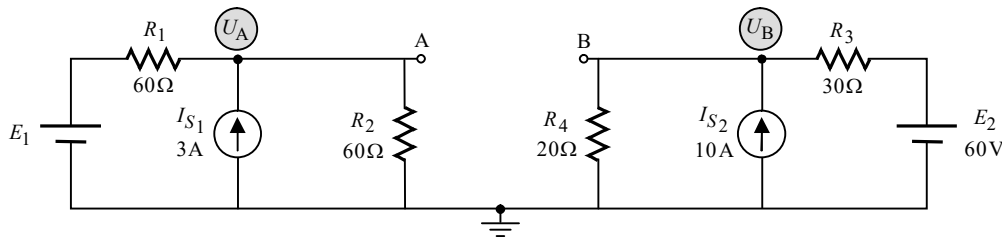


פתרון מלא לבחינת מה"ט בתורת החשמל – קיץ 2022 מועד אי

**שאלה 1**

.א.



היות ויש נתק בין A ל-B, שני חלקי המעגל מתפקדים כשני מעגלים נפרדים. נחשב תחילה את  $U_B$  בחלק המעגל הימני בעזרת משפט מילמן:

$$U_B = \frac{\frac{E_2}{R_3} + I_{S_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{60}{30} + 10}{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 144(V)$$

נתון בשאלה שהפוטנציאל  $U_A$  גדול מ- $U_B$  ב-56V. מכאן:

$$U_A = U_B + 56 = 144 + 56 = 200(V)$$

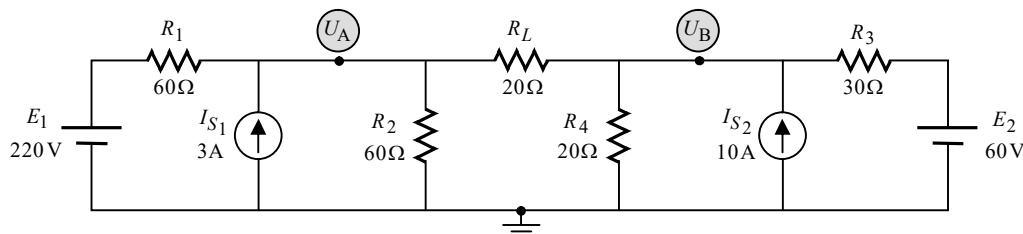
כעת נפעיל את משפט מילמן על חלק המעגל השמאלי ונחשב את  $E_1$ :

$$U_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + I_{S_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$200 = \frac{\frac{E_1}{60} + 3}{\frac{1}{60} + \frac{1}{60}}$$

$$E_1 = 220(V)$$

ב. נחבר את  $R_L$  אל המעגל ונשרטט את המעגל המתקבל:



נפתור במתחי צמתים. נציין שבדרך פתרון זו, הנתון מהסעיף הקודם  $U_{AB} = 56V$  אינו רלוונטי לסעיף זה, שהרי המעגל השתנה (אולם הערך של  $E_1$  שמצאנו נשאר נכון לסעיף זה, שהרי מדובר בגודל המתח של המקור, שלא השתנה).

**צומת A:**

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A:

$$(A) \quad I_{R_1} - I_{S_1} + I_{R_2} + I_{R_L} = 0 \quad \text{שלב א':}$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם):

$$(A) \quad \frac{U_A - E_1}{R_1} - I_{S_1} + \frac{U_A - 0}{R_2} + \frac{U_A - U_B}{R_L} = 0 \quad \text{שלב ב':}$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

$$(A) \quad \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} \right) U_A - \left( \frac{1}{R_L} \right) U_B = \frac{E_1}{R_1} + I_{S_1} \quad \text{שלב ג':}$$

נציב ערכים:

$$(A) \quad \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) U_A - \left( \frac{1}{20} \right) U_B = \frac{220}{60} + 3 \quad \text{שלב ד':}$$

**צומת B:**

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B:

$$(B) \quad I_{R_3} - I_{S_2} + I_{R_4} + I'_{R_L} = 0 \quad \text{שלב א':}$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם):

$$(B) \quad \frac{U_B - E_2}{R_3} - I_{S_2} + \frac{U_B - 0}{R_4} + \frac{U_B - U_A}{R_L} = 0 \quad \text{שלב ב':}$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

$$(B) \quad -\left( \frac{1}{R_L} \right) U_A + \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_L} \right) U_B = \frac{E_2}{R_3} + I_{S_2} \quad \text{שלב ג':}$$

נציב ערכים:

$$(B) \quad -\left( \frac{1}{20} \right) U_A + \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \right) U_B = \frac{60}{30} + 10 \quad \text{שלב ד':}$$

**לסיכום:**

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} (A) \quad \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) U_A - \left( \frac{1}{20} \right) U_B = \frac{220}{60} + 3 \\ (B) \quad -\left( \frac{1}{20} \right) U_A + \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \right) U_B = \frac{60}{30} + 10 \end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן:

$$U_A = 172.903(\text{V})$$

$$U_B = 154.838(\text{V})$$

קיבלנו ש-  $U_B$  גדול מ-  $E_2$ , ולכן הזרם נכנס להדק החיובי של  $E_2$ . מכאן שמקור זה הוא צרכן. נחשב את גודל ההספק שלו:

$$I_{E_2} = \frac{U_B - E_2}{R_3} = \frac{154.838 - 60}{30} = 3.161(\text{A})$$

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_{E_2} = 60 \cdot 3.161 = 189.677(\text{W})$$

**שאלה 2**

א. נתוני תא בודד:

$$E = 2.5(\text{V})$$

$$r = 0.5(\Omega)$$

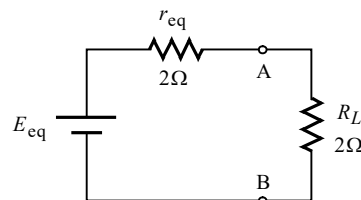
$$Q = 500(\text{mAh}) = 0.5(\text{Ah})$$

הערה: לשם נוחות הפתרון העברנו את הקיבול ליחידת מדידה של Ah.

מהגרף הנתון עולה כי הספק מקסימלי של 200W, מתקבל בעומס עבור  $R_L = 2\Omega$ . כידוע התנאי להספק מקסימלי הוא:

$$r_{\text{eq}} = R_L = 2(\Omega)$$

נשרטט את המעגל השקול ונציין על גביו את הידוע לנו:



נתון בשאלה שהמעגל עובד בנקודת העבודה המסומנת הגרף. כלומר:

$$P_{R_L} = 200(\text{W})$$

ניעזר בנתון זה ונחשב את  $E_{\text{eq}}$ :

$$P_{R_L} = I^2 \cdot R_L \Rightarrow$$

$$I = \sqrt{\frac{P_{R_L}}{R_L}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10(\text{A})$$

$$E_{\text{eq}} = I(r_{\text{eq}} + R_L) = 10(2 + 2) = 40(\text{V})$$

ב. נחשב את  $n$  בעזרת הנוסחה הבאה:

$$E_{\text{eq}} = nE \Rightarrow$$

$$n = \frac{E_{\text{eq}}}{E} = \frac{40}{2.5} = 16$$

נחשב את  $m$  בעזרת הנוסחה הבאה:

$$r_{\text{eq}} = \frac{n \cdot r}{m} \Rightarrow$$

$$m = \frac{n \cdot r}{r_{\text{eq}}} = \frac{16 \cdot 0.5}{2} = 4$$

ג. נחשב את הספק הסוללה :

$$P_{E_{eq}} = E_{eq} \cdot I = 40 \cdot 10 = 400 \text{ (W)}$$

התבקשנו להציג את האנרגיה ביחידת מדידה Wh (וואט-שעה). לפיכך בחישוב האנרגיה יש לשים לב להציב את הזמן הנתון ביחידת מדידה – שעה. מכאן :

$$W_{E_{eq}} = P_{E_{eq}} \cdot t = 400 \cdot \frac{10}{60} = 66.66 \text{ (Wh)}$$

**הערה:** ניתן היה להבין את כוונת השאלה גם אחרת – לחשב את האנרגיה המועברת לעומס בלבד. כתבנו את הפתרון שאליו התכוון כותב השאלה לעניות דעתנו.

ד. נחשב את הקיבול השקול של מערך התאים :

$$Q_{eq} = mQ = 4 \cdot 0.5 = 2 \text{ (Ah)}$$

נחשב כמה זמן מסוגלת הסוללה לספק את הזרם אותו חישבנו לעיל :

$$Q_{eq} = I \cdot t \Rightarrow$$

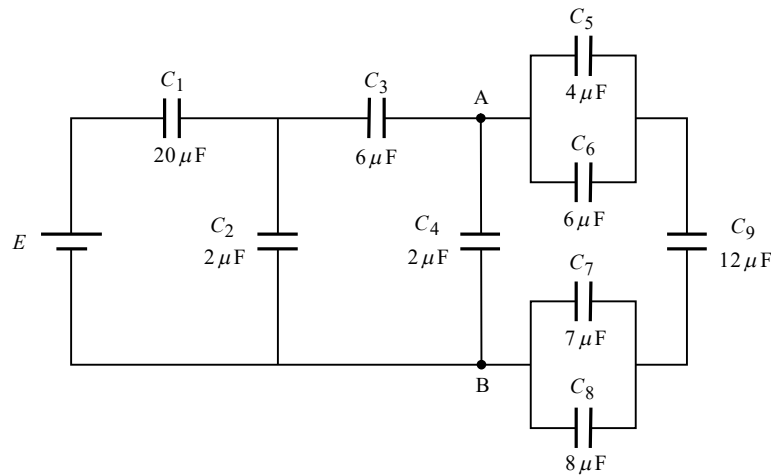
$$t = \frac{Q_{eq}}{I} = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ (h)}$$

קיבלנו את הזמן ביחידת מדידה – שעה (נובע מיחידת המדידה של  $Q_{eq}$ , ראה נתונים בתחילת השאלה). נמיר את הזמן ליחידת מדידה של דקות כנדרש בשאלה :

$$t = 0.2 \text{ (h)} = 0.2 \times 60 = 12 \text{ (minutes)}$$

**שאלה 3**

.א.



נחשב את הקיבול השקול של  $C_4$  עד  $C_9$  :

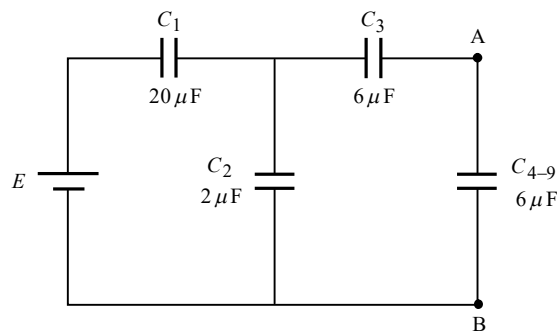
$$C_{5-6} = C_5 + C_6 = 4\mu + 6\mu = 10(\mu F)$$

$$C_{7-8} = C_7 + C_8 = 7\mu + 8\mu = 15(\mu F)$$

$$C_{5-9} = \left( \frac{1}{C_{5-6}} + \frac{1}{C_9} + \frac{1}{C_{7-8}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{10\mu} + \frac{1}{12\mu} + \frac{1}{15\mu} \right)^{-1} = 4(\mu F)$$

$$C_{4-9} = C_4 + C_{5-9} = 2\mu + 4\mu = 6(\mu F)$$

נשרטט מעגל שקול :



נתון  $U_{AB} = 60V$ . מכיוון שלא "קיפלנו" את חלק המעגל שמכיל את הנקודות A ו-B, ניתן לעשות שימוש בנתון זה. נחשב את המטען של  $C_{4-9}$  :

$$Q_{C_{4-9}} = U_{AB} \cdot C_{4-9} = 60 \cdot 6\mu = 360(\mu C)$$

זהו גם המטען של  $C_3$  (מטען זהה על קבלים בטור). מכאן :

$$U_{C_3} = \frac{Q_{C_{4-9}}}{C_3} = \frac{360\mu}{6\mu} = 60(V)$$

$$U_{C_2} = U_{C_3} + U_{AB} = 60 + 60 = 120(V)$$

$$Q_{C_2} = U_{C_2} \cdot C_2 = 120 \cdot 2\mu = 240(\mu C)$$

$$Q_T = Q_{C_2} + Q_{C_{4-9}} = 240\mu + 360\mu = 600(\mu C)$$

$$U_{C_1} = \frac{Q_T}{C_1} = \frac{600\mu}{20\mu} = 30(V)$$

$$E = U_{C_1} + U_{C_2} = 30 + 120 = 150(V)$$

ב.

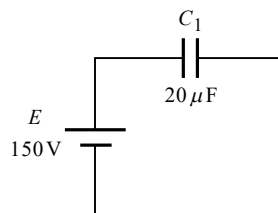
$$W_{C_1} = \frac{C_1 \cdot U_{C_1}^2}{2} = \frac{20 \times 10^{-6} \cdot 30^2}{2} = 9(mJ)$$

$$W_{C_2} = \frac{C_2 \cdot U_{C_2}^2}{2} = \frac{2 \times 10^{-6} \cdot 120^2}{2} = 14.4(mJ)$$

את האנרגיה האגורה במעגל כולו נחשב בעזרת הנוסחה הבאה (וכך לא נצטרך לחשב את הקיבול השקול של המעגל, דבר שאינו נחוץ בשאלה זו):

$$W_T = \frac{Q_T \cdot E}{2} = \frac{600 \times 10^{-6} \cdot 150}{2} = 45(mJ)$$

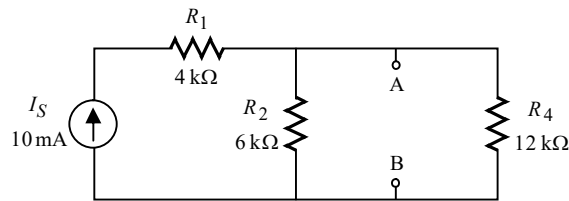
ג. קיצורו של  $C_2$  גורם לקיצור כל חלק המעגל שמימין אליו. נשרטט את המעגל המתקבל:



$$W_{C_1} = \frac{C_1 \cdot U_{C_1}^2}{2} = \frac{C_1 \cdot E^2}{2} = \frac{20 \times 10^{-6} \cdot 150^2}{2} = 225(mJ)$$

**שאלה 4**

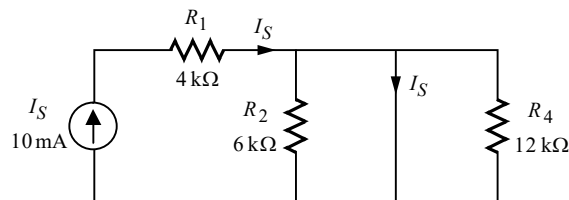
א. מיד לאחר סגירת המפסק הסליל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על הדקי הסליל הוא המתח בין A ל-B. נוכל לחשבו בקלות בעזרת משפט מילמן:

$$U_L(0^+) = U_{AB} = \frac{I_S}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = \frac{10\text{m}}{\frac{1}{6\text{k}} + \frac{1}{12\text{k}}} = 40(\text{V})$$

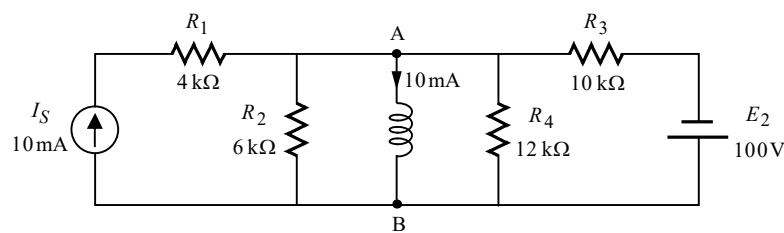
במצב המתמיד הסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



הקצר שיוצר הסליל גורם לקיצורם של הנגדים  $R_2$  ו- $R_4$ , כך שכל זרם המקור זורם דרך הסליל, כמתואר באיור. מכאן:

$$I_L(\infty) = I_S = 10(\text{mA})$$

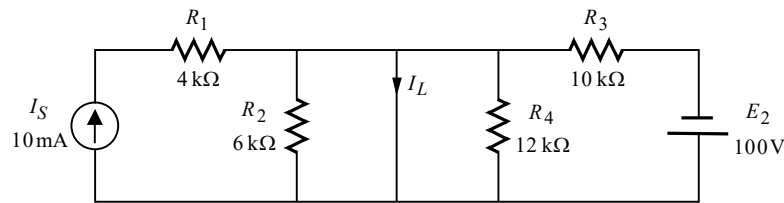
ב. לסליל יש תכונה שהוא שומר על רציפות הזרם דרכו. הלכך, ברגע ההתחלתי לאחר סגירת המפסק  $S_2$ , הזרם דרך הסליל יהיה עדיין כפי שהתקבל בסוף הסעיף הקודם, כלומר 10mA בכיוון מטה (נציין כי הקביעה שסליל הוא נתק במצב ההתחלתי, נכונה רק כאשר הסליל אינו טעון, וכמו בתחילת הפתרון. כאשר הסליל טעון הוא שקול למקור זרם שערכו משתנה). נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על הדקי הסליל הוא המתח בין A ל-B. נוכל לחשבו בקלות בעזרת משפט מילמן. אָל זרם הסליל נתייחס כמו אל מקור זרם. מכאן:

$$U_L = U_{AB} = \frac{I_S - I_L - \frac{E_2}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}} = \frac{10\text{m} - 10\text{m} - \frac{100}{10\text{k}}}{\frac{1}{6\text{k}} + \frac{1}{12\text{k}} + \frac{1}{10\text{k}}} = -28.571(\text{V})$$

**במצב המתמיד** הסליל תמיד קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



נוכל לקבל את זרם הסליל בקלות בעזרת סופרפוזיציה. יש לשים לב שכאשר בוחנים את תרומתו של כל מקור בנפרד, הקצר הקיים במקום הסליל מקצר את חלק המעגל שמהצד השני.

**תרומת מקור הזרם:**

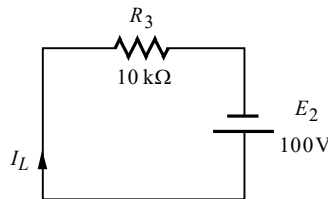
כמו בסעיף א' (בחישוב זרם הסליל במצב המתמיד), כל זרם המקור עובר דרך הסליל:

$$I'_L = I_S = 10(\text{mA})$$

כיוון זרם זה הוא כלפי מטה.

**תרומת מקור המתח:**

הקצר שיוצר הסליל גורם לקיצורם של הנגדים  $R_2$  ו- $R_4$ , כך שנשאר מעגל הכולל את מקור המתח ואת  $R_3$  בלבד, כמתואר באיור הבא:



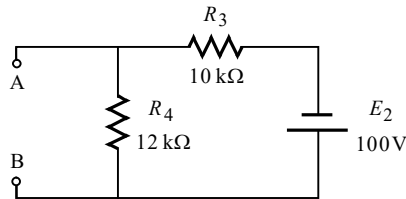
נחשב את זרם הסליל:

$$I''_L = \frac{E_2}{R_3} = \frac{100}{10\text{k}} = 10(\text{mA})$$

שתי תרומות הזרם בכיוונים מנוגדים. נחסר בין התרומות ונקבל:

$$I_L = I'_L - I''_L = 10\text{m} - 10\text{m} = 0(\text{A})$$

ג. הסליל כאמור שומר על רציפות הזרם דרכו. בסוף השלב הקודם קיבלנו שהזרם דרך הסליל הוא אפס, ולכן זה יהיה המצב גם בתחילת השלב הבא. מצב זה שקול לנתק. נשרטט את המעגל המתקבל:

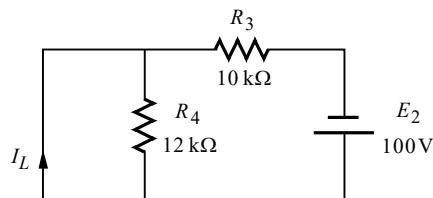


המתח על הדקי הסליל הוא המתח בין A ל-B. נוכל לחשבו בקלות בעזרת מחלק מתח:

$$U_L = U_{AB} = -\frac{E_2 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{100 \cdot 12k}{10k + 12k} = -54.545(V)$$

**הערה:** לסימן השלילי אין משמעות בעלת חשיבות. הוא נועד לציין את קוטביות המתח שקיבלנו כעת, ביחס לשאר תוצאות המתחים שהתקבלו בשאלה זו.

**במצב המתמיד** הסליל תמיד קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



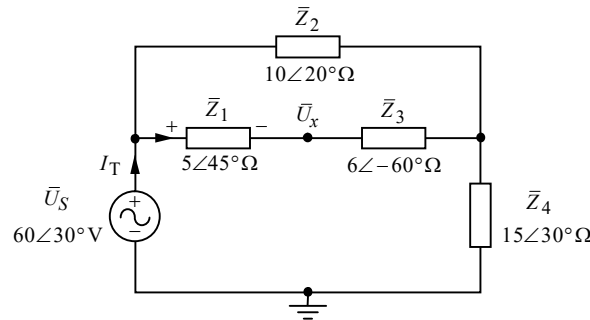
קיצורו של הסליל גורם לקיצורו של  $R_4$ . קיבלנו מעגל הכולל את מקור המתח ואת  $R_3$  בלבד. מכאן:

$$I_L(\infty) = -\frac{E_2}{R_3} = -\frac{100}{10k} = -10(mA)$$

הסימן השלילי כאן רק נועד לציין שכיוון הזרם דרך הסליל הוא כלפי מעלה.

**שאלה 5**

א. בסעיף זה המפסק פתוח. נשרטט את המעגל המתקבל:



אנו נחשב את  $\bar{U}_x$  בעזרת מסלול מתחים היוצא מנקודה זו של  $\bar{U}_x$ , עובר דרך  $\bar{Z}_1$  ו-  $\bar{U}_S$ , ומסתיים באדמה. קוטביות המתחים שבמסלול סומנה מראש על גבי האיור (קוטביות מקור המתח נתונה בשאלה, וקוטביות העכבה  $\bar{Z}_1$  נקבעה כתמיד על פי כיוון הזרם דרכה).

נחשב תחילה את העכבה השקולה של המעגל, ואת הזרם הכללי:

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_2 \parallel \bar{Z}_{1,3} + \bar{Z}_4 = \left( \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3} \right)^{-1} + \bar{Z}_4$$

$$= \left( \frac{1}{10\angle 20^\circ} + \frac{1}{5\angle 45^\circ + 6\angle -60^\circ} \right)^{-1} + 15\angle 30^\circ = 18.744\angle 23.448^\circ (\Omega)$$

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{U}_S}{\bar{Z}_T} = \frac{60\angle 30^\circ}{18.744\angle 23.448^\circ} = 3.200\angle 6.551^\circ (\text{A})$$

נחשב את הזרם העובר דרך  $\bar{Z}_{1,3}$  בעזרת כלל מחלק הזרם:

$$\bar{I}_{Z_{1,3}} = \frac{\bar{I}_T \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_{1,3}} = \frac{(3.200\angle 6.551^\circ)(10\angle 20^\circ)}{10\angle 20^\circ + 5\angle 45^\circ + 6\angle -60^\circ} = 1.996\angle 20.249^\circ (\text{A})$$

נחשב את המתח הנופל על  $\bar{Z}_1$ :

$$\bar{U}_{Z_1} = \bar{I}_{Z_{1,3}} \cdot \bar{Z}_1 = (1.996\angle 20.249^\circ)(5\angle 45^\circ) = 9.984\angle 65.249^\circ (\text{V})$$

נחשב כעת את המתח  $\bar{U}_x$  בעזרת מסלול מתחים כפי שהתבאר לעיל:

$$\bar{U}_x = -\bar{U}_{Z_1} + \bar{U}_S = -9.984\angle 65.249^\circ + 60\angle 30^\circ = 52.165\angle 23.657^\circ (\text{V})$$

ב. ניתן לפתור סעיף זה בכמה דרכים. נציג את המרכזיות שבהן:

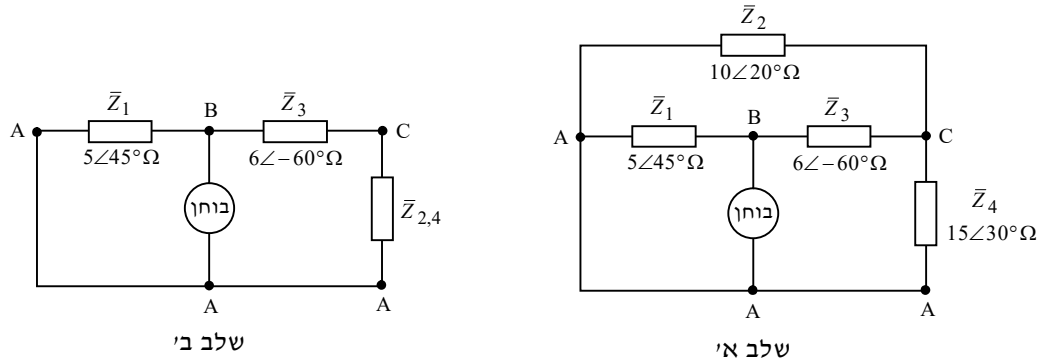
- ניתן לפתור בעזרת מתחי צמתים או זרמי חוגים, אולם בשני המקרים נידרש ליותר ממשוואה אחת. נכון לזמן כתיבת שורות אלו, המחשבון המצוי בידי רוב הסטודנטים אינו מסוגל לפתור מטריצה עם מספרים מרוכבים, ולכן דרך פתרון זו פחות רלוונטית.
- ניתן לפתור בעזרת המרת כוכב-משולש, אולם דרך זו ארוכה ומסורבלת יחסית (ברם ייתכן והיא מתאימה להרבה סטודנטים).
- ניתן לפתור בעזרת הפעלת משפט תבנין על הדקי העכבה  $\bar{Z}_5$ . דרך זו נוחה יותר לפתרון לטעמנו, שכן ניתן לפתור בעזרתה בקלות את סעיף ג'. את מתח תבנין כבר קיבלנו למעשה בסעיף הקודם – זהו המתח  $\bar{U}_x$  שחישבנו. נפתור בדרך זו.

מתח תבנין הינו כאמור:

$$\bar{E}_{Th} = \bar{U}_x = 52.165 \angle 23.657^\circ (\text{V})$$

**חישוב עכבת תבנין:**

נקצר את מקור המתח, נניח מקור בוחר במקום  $\bar{Z}_5$ , ונשרטט את המעגל המתקבל:

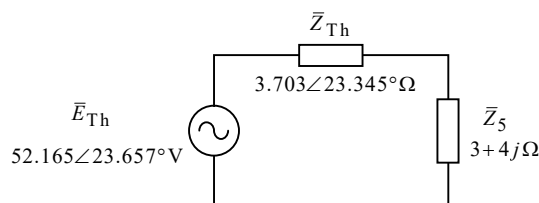


בשלב א' שרטטנו את המעגל המתקבל. לשם הזיהוי הנכון של החיבורים בין העכבות השונות, סומנו הצמתים של המעגל. הכלל הוא – צמתים שביניהם מפריד חוק קצר הם למעשה אותו הצומת (ראה נידון זה בהרחבה בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בביאור שיטת הצמתים הזהים). כך קיבלנו שהעכבות  $\bar{Z}_2$  ו- $\bar{Z}_4$  שתיהן מתוחות בין A ל-C, ולפיכך שתיהן מחוברות במקביל אחת לשנייה. בשלב ב' שרטטנו את המעגל המתקבל לאחר המיזוג בין  $\bar{Z}_2$  ו- $\bar{Z}_4$ . מכאן:

$$\bar{Z}_{2,4} = \left( \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_4} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{10 \angle 20^\circ} + \frac{1}{15 \angle 30^\circ} \right)^{-1} = 6.021 \angle 23.997^\circ (\Omega)$$

$$\bar{Z}_{Th} = \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_{2,4}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{5 \angle 45^\circ} + \frac{1}{6 \angle -60^\circ + 6.021 \angle 23.997^\circ} \right)^{-1} = 3.703 \angle 23.345^\circ (\Omega)$$

נשרטט את המעגל תבנין שקיבלנו:

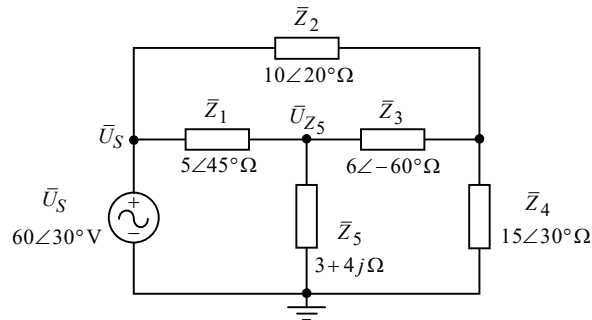


$$\bar{I}_{Z_5} = \frac{\bar{E}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + \bar{Z}_5} = \frac{52.165 \angle 23.657^\circ}{3.703 \angle 23.345^\circ + 3 + 4j} = 6.197 \angle -16.848^\circ (\text{A})$$

ג. נחשב תחילה את המתח הנופל על  $\bar{Z}_5$  :

$$\bar{U}_{Z_5} = \bar{I}_{Z_5} \cdot \bar{Z}_5 = (6.197 \angle -16.848^\circ)(3 + 4j) = 30.896 \angle 36.281^\circ (\text{V})$$

נחזור כעת אל המעגל המקורי :



המתח על  $\bar{Z}_5$  שמצאנו במעגל תבנית, הוא כמובן גם המתח על  $\bar{Z}_5$  במעגל המקורי. נוכל מכאן לחשב בקלות את המתח, הזרם וההספקים של  $\bar{Z}_1$  :

$$\bar{U}_{Z_1} = \bar{U}_S - \bar{U}_{Z_5} = 60 \angle 30^\circ - 30.896 \angle 36.281^\circ = 29.395 \angle 23.377^\circ (\text{V})$$

$$\bar{I}_{Z_1} = \frac{\bar{U}_{Z_1}}{\bar{Z}_1} = \frac{29.395 \angle 23.377^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 5.879 \angle -21.622^\circ (\text{A})$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{Z_1} &= \bar{U}_{Z_1} \cdot \bar{I}_{Z_1}^* = (29.395 \angle 23.377^\circ)(+5.879 \angle -21.622^\circ) = \\ &= 122.203 + 122.203j = 172.822 \angle 45^\circ (\text{VA}) \end{aligned}$$

מכאן :

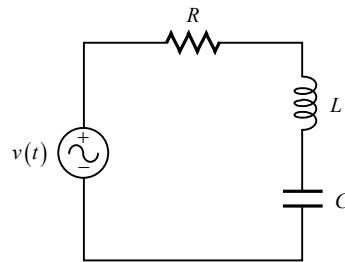
$$P_{Z_1} = 122.203 (\text{W})$$

$$Q_{Z_1} = 122.203 (\text{VAR})$$

$$S_{Z_1} = 172.822 (\text{VA})$$

**שאלה 6**

א.



נתון שבתדירות אפס המתח על הקבל הוא 200V (לא ברור אם מדובר במתח אפקטיבי או בתנופה. **באיור** בשאלה כל המתחים מסומנים כתלות בזמן. אולם על פי אופן ההצגה של המתח, מדובר במתח אפקטיבי. זוהי גם לרוב ברירת המחדל. מה גם שלא ציינו שמדובר בתנופה. מה גם שאמרו "מתח נמדד", ומכשירי מדידה סטנדרטיים נותנים ערך אפקטיבי. נפתור על פי הנחה זו שמדובר במתח אפקטיבי. מכל מקום לדעתנו הדבר רלוונטי רק לסעיף א', שכן בסעיפים הבאים נעשה שימוש ב**יחס** בין המתח והזרם, ויחס זה יהיה זהה בין אם מדובר בתנופות המתח והזרם, ובין אם מדובר בערכים האפקטיביים).

מקור AC בתדירות אפס מתנהג כמו מקור DC. עבור מקור DC הקבל נתק, ובמצב זה במעגל הנתון, המתח שלו שווה למתח המקור (אין מעגל סגור – המתח של הנגד והסליל אפס, כך שמסלול מתחים בין הדקי הקבל נותן את מתח המקור). ובניסוח מתמטי:

$$E = U_C = 200(\text{V})$$

ב. נתון שבתדר התהודה, הזרם במעגל הוא 5A. כידוע בתהודה טורית הסליל והקבל שקולים לקצור, כך שכל מתח המקור נופל על הנגד. את מתח המקור חישבנו בסעיף הקודם. מכאן:

$$R = \frac{E}{I} = \frac{200}{5} = 40(\Omega)$$

נתון שבתהודה מתח הסליל הוא 200V (לא קשור למתח המקור שהוא בעל ערך זהה. נציין שלמרות שהסליל והקבל שקולים לקצר, אין פירוש הדבר שהם באמת קצר, אלא כמובן שהם קיימים במעגל, ויש עליהם מפל מתח. הרחבה על נידון זה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי תהודה).

כידוע בתהודה טורית לסליל ולקבל יש היגב זהה, ובעקבות כך גם המתח עליהם זהה **בערכו המוחלט**. כמו כן הזרם דרכם זהה, שהרי הם מחוברים בטור. נחשב את ההיגב שלהם:

$$X_L = X_C = \frac{U_L}{I} = \frac{200}{5} = 40(\Omega)$$

נתון שתדר התהודה הוא  $f_0 = 500\text{Hz}$ . ניעזר בנתון זה על מנת לחשב את  $L$  ואת  $C$ :

$$X_L = 2\pi f_0 L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{2\pi f_0} = \frac{40}{2\pi \cdot 500} = 12.732(\text{mH})$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\pi f_0 X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 40} = 7.957(\mu\text{F})$$

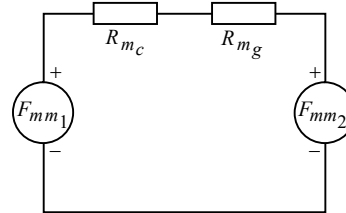
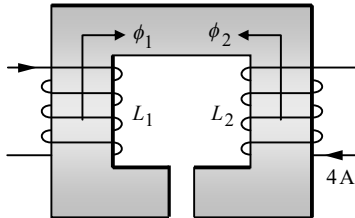
**שאלה 7**

א. את  $\mu_r$  נוציא מנתוני הגרף הנתון בשאלה:

$$B = \mu_0 \mu_r H \Rightarrow$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{0.8}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 250} = 2546.479$$

ב.



בצד שמאל של האיור מובא המעגל המגנטי המקורי. כיווני השטפים נקבעו על פי כלל יד ימין לסולנואיד.

בצד ימין של האיור מובא ה"מעגל החשמלי" השקול למעגל המגנטי. כיוון הכמ"מ של כל סליל נקבע בהתאם לכיוון השטף שהוא יוצר. שני המיאונים שבאיור הם מיאון הליבה  $R_{m_c}$  ומיאון חריץ האוויר  $R_{m_g}$ .

ג. נחשב תחילה את הזרם הזורם דרך כל סליל. ההתנגדות של סליל 1 נתונה. מכאן:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{5}{10} = 0.5(A)$$

לגבי סליל 2, נחשב תחילה את ההתנגדות שלו בעזרת נתוני המוליך שבשאלה:

$$R_2 = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{0.018 \cdot 100}{0.3} = 6(\Omega)$$

מכאן:

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{12}{6} = 2(A)$$

נרכז נתונים:

$$\ell_c = 240(mm) = 240 \times 10^{-3}(m)$$

$$\ell_g = 0.6 \times 10^{-3}(m)$$

$$A = 1.2(cm^2) = 1.2 \times 10^{-4}(m^2)$$

$$\mu_r = 2546.479$$

$$N_1 = 400$$

$$N_2 = 500$$

$$I_1 = 0.5(A)$$

$$I_2 = 2(A)$$

נחשב את מיאוני המעגל :

$$R_{m_c} = \frac{\ell_c}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{240 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 2546.479 \cdot 1.2 \times 10^{-4}} = 625 \times 10^3 \left( \frac{1}{\text{H}} \right)$$

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{0.6 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 1.2 \times 10^{-4}} = 3.978 \times 10^6 \left( \frac{1}{\text{H}} \right)$$

$$R_{m_T} = R_{m_c} + R_{m_g} = 625 \times 10^3 + 3.978 \times 10^6 = 4.603 \times 10^6 \left( \frac{1}{\text{H}} \right)$$

נחשב את הכמ"מ של כל סליל :

$$F_{mm_1} = N_1 \cdot I_1 = 400 \cdot 0.5 = 200(\text{AT})$$

$$F_{mm_2} = N_2 \cdot I_2 = 500 \cdot 2 = 1000(\text{AT})$$

נחשב את השטף הכללי (בדומה לחישוב זרם במעגל חשמלי) :

$$\phi_T = \frac{F_{mm_2} - F_{mm_1}}{R_{m_T}} = \frac{1000 - 200}{4.603 \times 10^6} = 0.173(\text{mWb})$$

כיוון השטף הכללי הוא ככיוון המאולץ על ידי הכמ"מ הגדול יותר מבין השניים – נגד כיוון השעון.

ד. נחשב את ההשראות העצמית של כל סליל :

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_{m_T}} = \frac{400^2}{4.603 \times 10^6} = 34.753(\text{mH})$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_{m_T}} = \frac{500^2}{4.603 \times 10^6} = 54.302(\text{mH})$$

נחשב את ההשראות ההדדית בין הסלילים :

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = 1\sqrt{34.753\text{m} \cdot 54.302\text{m}} = 43.441(\text{mH})$$

ה. יש להתייחס בסעיף זה לסליל 1 כמובא בתיקון של מה"ט לשאלה. עבור מקור AC יש לסליל היגב  $X_{L_1}$  בנוסף להתנגדות האומית  $R_1 = 10\Omega$ . מכאן :

$$X_{L_1} = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 100 \cdot 34.753 \times 10^{-3} = 21.836(\Omega)$$

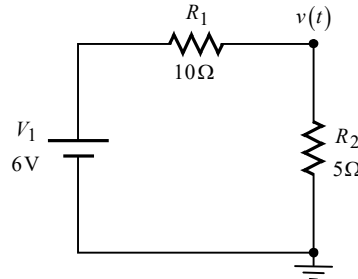
$$I_1 = \frac{E}{R_1 + jX_{L_1}} = \frac{60}{10 + j21.836} = 2.498 \angle -65.394^\circ (\text{A})$$

**שאלה 8**

א. מעגל זה מכיל מקורות מסוגים שונים ולכן יש לפתור בסופרפוזיציה.

**תרומת  $V_1$ :**

עבור מקור DC הסליל קצר והקבל נתק. נקצר את שאר המקורות, ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$V' = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 5}{10 + 5} = 2 \text{ (V)}$$

**תרומת  $v_2(t)$ :**

נתון:

$$v_2(t) = 12\sqrt{2} \sin(1000t + 50^\circ) \text{ (V)}$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

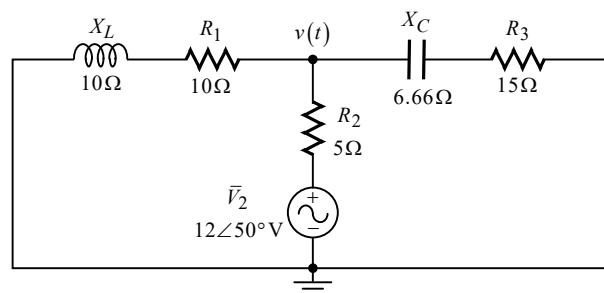
$$\bar{V}_2 = \frac{12\sqrt{2} \angle 50^\circ}{\sqrt{2}} = 12 \angle 50^\circ \text{ (V)}$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 10 \times 10^{-3} = 10 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 150 \times 10^{-6}} = 6.66 \text{ (}\Omega\text{)}$$

נקצר את שאר המקורות, ונשרטט את המעגל המתקבל:



נחשב את המתח המבוקש בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{V}'' = \frac{\frac{\bar{V}_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 - jX_C}} = \frac{\frac{12 \angle 50^\circ}{5}}{\frac{1}{10 + j10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15 - j6.66}} = 7.824 \angle 54.723^\circ \text{ (V)}$$

**תרומת  $v_3(t)$  :**

נתון :

$$v_3(t) = 6\sqrt{2} \sin(2000t + 120^\circ) (\text{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית) :

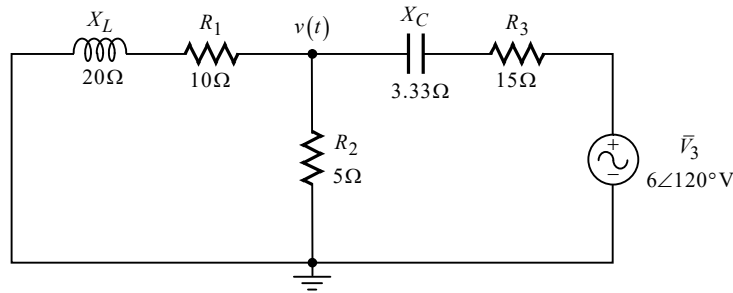
$$\bar{V}_3 = \frac{6\sqrt{2} \angle 120^\circ}{\sqrt{2}} = 6 \angle 120^\circ (\text{V})$$

עבור מקור AC יש כאמור לסליל ולקבל היגב. ניעזר בתדר מקור זה ונחשב היגבים אלה :

$$X_L = \omega L = 2000 \cdot 10 \times 10^{-3} = 20 (\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2000 \cdot 150 \times 10^{-6}} = 3.33 (\Omega)$$

נקצר את שאר המקורות, ונשרטט את המעגל המתקבל :



נחשב את המתח המבוקש בעזרת משפט מילמן :

$$\bar{V}''' = \frac{\frac{\bar{V}_3}{R_3 - jX_C}}{\frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 - jX_C}} = \frac{\frac{6 \angle 120^\circ}{15 - j3.33}}{\frac{1}{10 + j20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15 - j3.33}} = 1.371 \angle 137.744^\circ (\text{V})$$

**נסכם את התרומות.** כידוע בהצגת התרומות בסופרפוזיציה יש להציג את המתחים כתלות בזמן. מכאן :

$$v(t) = v'(t) + v''(t) + v'''(t) = 2 + 7.824\sqrt{2} \sin(1000t + 54.723^\circ) + 1.371\sqrt{2} \sin(2000t + 137.744^\circ) (\text{V})$$

**הערה:** למרות שהמקור  $\bar{V}_2$  הוא בכיוון הפוך ביחס לשאר המקורות, מכל מקום חישבנו את תרומתו בעזרת משפט מילמן בדומה ליתר המקורות, ולכן התוצאה מקבילה מבחינת הקוטביות ליתר המקורות (הדבר אנלוגי לחישוב  $V_{AB}$  עבור כולם ולא  $V_{BA}$ ). לפיכך גם התרומה שלו הופיעה בסימן חיובי.

ב. את הערך היעיל השקול נוכל לקבל בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב :

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_{\text{rms}1}^2 + V_{\text{rms}2}^2 + V_{\text{rms}3}^2} = \sqrt{2^2 + 7.824^2 + 1.371^2} = 8.192 (\text{V})$$