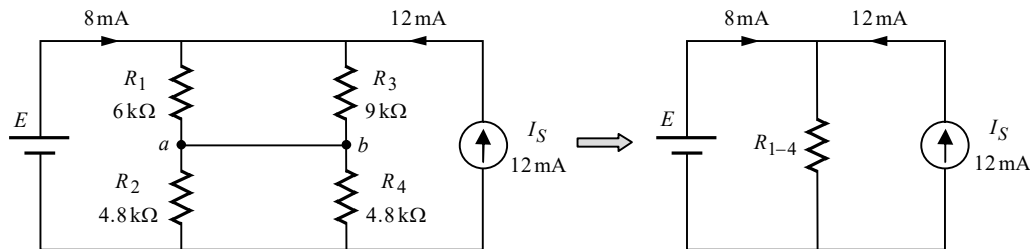


פתרון מלא לבחינת מה"ט בתורת החשמל – קיץ 2022 מועד ב'

שאלה 1

.א.



בצד שמאל של האיור שרטטנו את המעגל כפי הנתון בשאלה. בצד ימין שרטטנו את המעגל לאחר צמצום הנגדים לנגד שקול. נחשב את ערכו של נגד זה:

$$R_{1,3} = R_1 \parallel R_3 = \left(\frac{1}{6k} + \frac{1}{9k} \right)^{-1} = 3.6(k\Omega)$$

$$R_{2,4} = R_2 \parallel R_4 = \left(\frac{1}{4.8k} + \frac{1}{4.8k} \right)^{-1} = 2.4(k\Omega)$$

$$R_{1-4} = R_{1,3} + R_{2,4} = 3.6k + 2.4k = 6(k\Omega)$$

המתח על הנגד השקול R_{1-4} הוא מתח המקור. נוכל לקבל מתח זה בקלות בעזרת נתוני המעגל השקול שבצד ימין לעיל. מכאן:

$$I_{R_{1-4}} = I_E + I_S = 8m + 12m = 20(mA)$$

$$E = U_{R_{1-4}} = I_{R_{1-4}} \cdot R_{1-4} = 20m \cdot 6k = 120(V)$$

ב. הזרם הכולל העובר דרך מערך הנגדים הינו כאמור:

$$I_{R_{1-4}} = I_E + I_S = 8m + 12m = 20(mA)$$

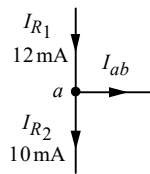
נחשב את הזרם הזורם דרך R_1 . הנגדים R_1 ו- R_3 מחוברים במקביל, וזרם זה של 20mA מתחלק ביניהם. מכאן:

$$I_{R_1} = \frac{I_{R_{1-4}} \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{20m \cdot 9k}{6k + 9k} = 12(mA)$$

כמו כן הנגדים R_2 ו- R_4 מחוברים במקביל, וזרם זה של 20mA מתחלק ביניהם. מכיוון שנגדים אלה שווים, הזרם מתחלק ביניהם בשווה. מכאן:

$$I_{R_2} = \frac{I_{R_{1-4}}}{2} = \frac{20m}{2} = 10(mA)$$

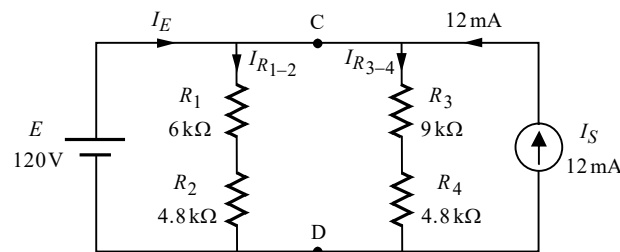
נציג את הזרמים המתקבלים סביב צומת a :



על פי חוק הזרמים לצומת a , כיוון הזרם I_{ab} הוא ימינה מ- a ל- b . נחשב את גודלו של זרם זה :

$$I_{ab} = I_{R_1} - I_{R_2} = 12\text{m} - 10\text{m} = 2(\text{mA})$$

ג. הנתק בין a ל- b מהווה שינוי בנתוני המעגל, ולכן הזרמים שחישבנו לעיל אינם רלוונטיים לסעיף זה. כמו כן הזרם הנתון של מקור המתח אינו רלוונטי. אולם ערך מקור המתח עצמו שמצאנו בסעיף א' נשאר רלוונטי, שהרי מדובר בגודל המקור שלא השתנה. נשרטט את המעגל המתקבל, ונציין על גביו את הידוע לנו :



כעת הנגדים R_1 ו- R_2 מחוברים ביניהם בטור, ושניהם יחד מחוברים במקביל למקור המתח. מצב דומה קיים גם לגבי R_3 ו- R_4 . נחשב את הזרם העובר דרך נגדים אלה :

$$I_{R_{1-2}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{6\text{k} + 4.8\text{k}} = 11.11(\text{mA})$$

$$I_{R_{3-4}} = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{120}{9\text{k} + 4.8\text{k}} = 8.695(\text{mA})$$

כיוונם של זרמים אלה הוא כלפי מטה כמתואר באיור (נקבע על פי כיוונו של מקור המתח E , שמאלץ בנקודה C פוטנציאל גבוה יותר מאשר בנקודה D . הזרם זורם תמיד מהפוטנציאל הגבוה לנמוך).

כיוונו של הזרם דרך מקור המתח הינו בגדר הנחה התחלתית. כעת, אם נתבונן על צומת C נגלה, כי ישנם שני זרמים הנכנסים לצומת ושני זרמים היוצאים ממנו. על פי חוק הזרמים, סכום הזרמים הנכנסים שווה ליוצאים. מכאן :

$$I_E + I_S = I_{R_{1-2}} + I_{R_{3-4}}$$

$$I_E + 12\text{m} = 11.11\text{m} + 8.695\text{m}$$

$$I_E = 7.806(\text{mA})$$

קיבלנו תוצאה חיובית, מה שאומר שכיוון הזרם דרך מקור המתח הינו כפי ההנחה ההתחלתית (מכל מקום הדבר לא רלוונטי לפתרון שאלה זו). נחשב את ההספק של מקור המתח :

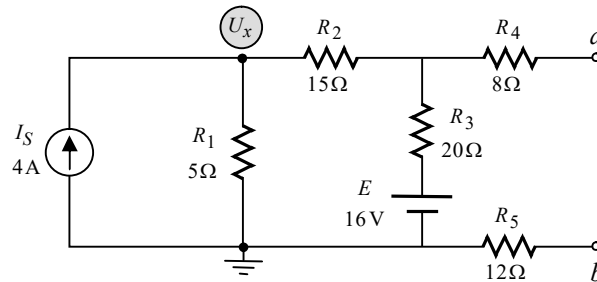
$$P_E = E \cdot I_E = 120 \cdot 7.806\text{m} = 0.936(\text{W})$$

שאלה 2

א. נמצא תחילה מעגל תבנין, ולאחר מכן נמיר מעגל זה למעגל נורטון שקול בעזרת המרת מקורות פשוטה.

חישוב מתח תבנין:

ננתק את R_L ונשרטט את המעגל המתקבל:



הנגדים R_4 ו- R_5 מנותקים ולכן הם אינם חלק פעיל של המעגל המתקבל. נחשב את המתח U_x בעזרת משפט מילמן:

$$U_x = \frac{I_S + \frac{E}{R_2 + R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{4 + \frac{16}{15 + 20}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{15 + 20}} = 19.5(V)$$

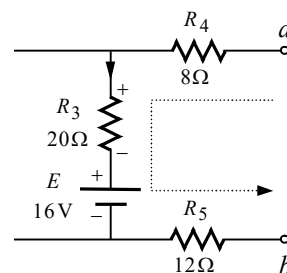
נחשב את הזרם והמתח של R_3 :

$$I_{R_3} = \frac{U_x - E}{R_2 + R_3} = \frac{19.5 - 16}{15 + 20} = 0.1(A)$$

$$U_{R_3} = I_{R_3} \cdot R_3 = 0.1 \cdot 20 = 2(V)$$

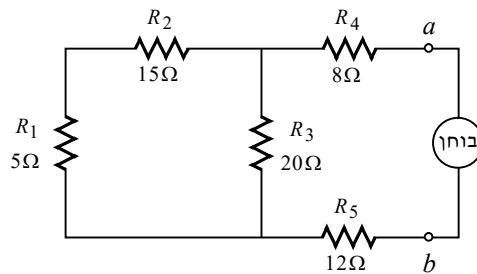
מתח תבנין הוא המתח U_{ab} . נחשב מתח זה בעזרת מסלול מתחים בין a ל- b . מכיוון שהמתח U_x גדול מ- E , הזרם דרך E זורם כלפי מטה. על פי זה נוכל לקבוע את כיוון קוטביות המתח של R_3 (בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). מכאן:

$$E_{Th} = U_{ab} = +U_{R_3} + E = 2 + 16 = 18(V)$$



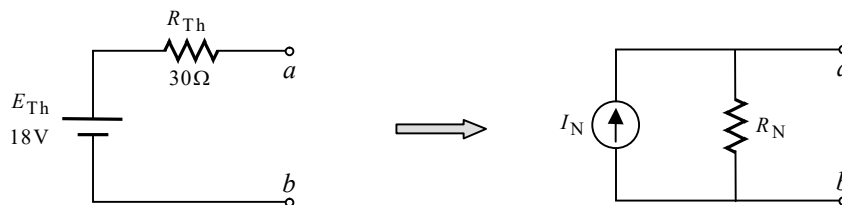
חישוב התנגדות תבנית:

ננתק את מקור הזרם, נקצר את מקור המתח, נניח מקור בוחן בין a ל- b ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$R_{Th} = R_{1-2} \parallel R_3 + R_4 + R_5 = \left(\frac{1}{5+15} + \frac{1}{20} \right)^{-1} + 8 + 12 = 30(\Omega)$$

מכאן:



בצד שמאל של האיור מובא המעגל תבנית שקיבלנו. בצד ימין של האיור מובא מעגל נורטון שקול. כאמור לעיל, נוכל לקבל את ערכי המעגל נורטון בעזרת המרת מקורות פשוטה.
מכאן:

$$I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{18}{30} = 0.6(A)$$

$$R_N = R_{Th} = 30(\Omega)$$

ב. התנאי להעברת הספק מקסימלי במעגלי DC הינו:

$$R_L = R_{Th} = 30(\Omega)$$

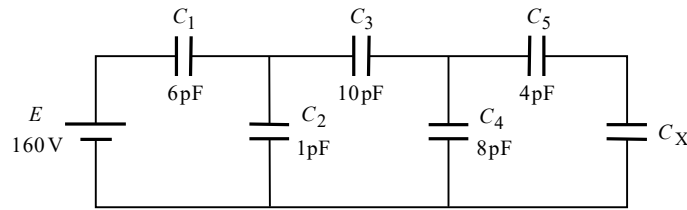
ג. ניעזר במעגל תבנית שקיבלנו ונחשב את ההספק המבוקש (יכולנו לחשב גם בעזרת המעגל נורטון):

$$I_{R_L} = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{18}{30 + 30} = 0.3(A)$$

$$P_{R_L} = I_{R_L}^2 \cdot R_L = 0.3^2 \cdot 30 = 2.7(W)$$

שאלה 3

.א.

נתון $Q_{C_1} = 480 \text{ pC}$. נחשב את המתח של קבל זה:

$$U_{C_1} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{480 \text{ p}}{6 \text{ p}} = 80 \text{ (V)}$$

מסלול מתחים בין ההדקים של מקור המתח, מראה כי מתח המקור שווה לסכום מתחי הקבלים C_1 ו- C_2 . מכאן:

$$U_{C_2} = E - U_{C_1} = 160 - 80 = 80 \text{ (V)}$$

$$Q_{C_2} = U_{C_2} \cdot C_2 = 80 \cdot 1 \text{ p} = 80 \text{ (pC)}$$

$$Q_{C_3} = Q_{C_1} - Q_{C_2} = 480 \text{ p} - 80 \text{ p} = 400 \text{ (pC)}$$

$$U_{C_3} = \frac{Q_{C_3}}{C_3} = \frac{400 \text{ p}}{10 \text{ p}} = 40 \text{ (V)}$$

מסלול מתחים בין ההדקים של C_2 , מראה כי מתח קבל זה שווה לסכום מתחי הקבלים C_3 ו- C_4 . מכאן:

$$U_{C_4} = U_{C_2} - U_{C_3} = 80 - 40 = 40 \text{ (V)}$$

$$Q_{C_4} = U_{C_4} \cdot C_4 = 40 \cdot 8 \text{ p} = 320 \text{ (pC)}$$

$$Q_{C_5} = Q_{C_3} - Q_{C_4} = 400 \text{ p} - 320 \text{ p} = 80 \text{ (pC)}$$

$$U_{C_5} = \frac{Q_{C_5}}{C_5} = \frac{80 \text{ p}}{4 \text{ p}} = 20 \text{ (V)}$$

מסלול מתחים בין ההדקים של C_4 , מראה כי מתח קבל זה שווה לסכום מתחי הקבלים C_5 ו- C_X . מכאן:

$$U_{C_X} = U_{C_4} - U_{C_5} = 40 - 20 = 20 \text{ (V)}$$

קיבלנו את המתח של C_X . המטען של C_X הוא גם המטען של C_5 שחושב לעיל. מכאן:

$$C_X = \frac{Q_{C_X}}{U_{C_X}} = \frac{80 \text{ p}}{20} = 4 \text{ (pF)}$$

ב. נתון המטען הכולל של המעגל $Q_T = Q_{C_1} = 480 \text{ pC}$. כמו כן נתון המתח הכולל של המעגל $E = 160 \text{ V}$. נחשב בעזרת נתונים אלה את הקיבול השקול של המעגל:

$$C_T = \frac{Q_T}{E} = \frac{480 \text{ p}}{160} = 3 \text{ (pF)}$$

נחשב את האנרגיה הכוללת האגורה במעגל:

$$W_T = \frac{C_T \cdot E^2}{2} = \frac{3 \times 10^{-12} \cdot 160^2}{2} = 38.4 \text{ (nJ)}$$

ג. הקיבול של קבל לוחות נתון על ידי:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

נתון שבין הלוחות מפריד אוויר. מכאן:

$$\epsilon_r = 1$$

כמו כן נתון המרחק בין הלוחות:

$$d = 1 \text{ (mm)} = 1 \times 10^{-3} \text{ (m)}$$

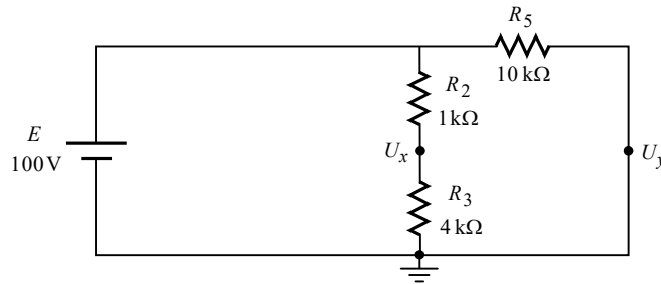
יש לשים לב להעביר את המרחק d ליחידת מדידה של מטר, וכפי שרשמנו (שכן יש להציב את המרחק בנוסחה של הקיבול לעיל במטרים, וכפי המובא בנוסחאון מה"ט). נחשב את שטח הלוחות בעזרת הנוסחה של הקיבול לעיל:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \Rightarrow$$

$$A = \frac{C_1 \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{6 \times 10^{-12} \cdot 1 \times 10^{-3}}{8.854 \times 10^{-12} \cdot 1} = 0.677 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{)}$$

שאלה 4

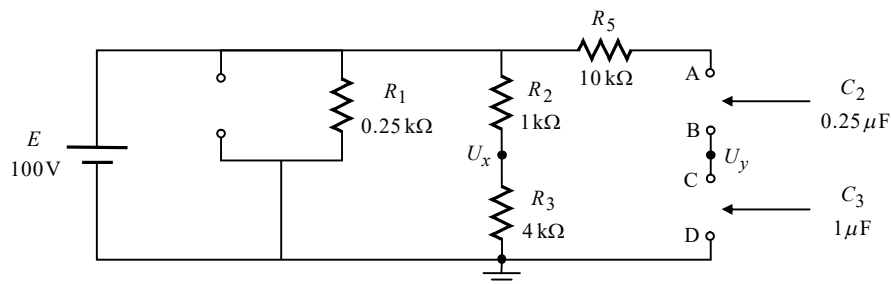
א. **ברגע ההתחלתי** הקבלים קצר והסליל נתק. נשרטט את המעגל המתקבל:



$$U_x = U_{R_3} = \frac{E \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 4k}{1k + 4k} = 80(V)$$

$$U_y = 0(V)$$

במצב המתמיד הקבלים נתק והסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



גם במצב המתקבל כעת המתח U_x הוא המתח על R_3 , ומקור המתח מחובר במקביל ל- R_2 ו- R_3 . נמצא שהמתח U_x יהיה כפי שחישבנו לעיל:

$$U_x = U_{R_3} = \frac{E \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 4k}{1k + 4k} = 80(V)$$

המתח U_y הוא המתח על C_3 . מכיוון ששני הקבלים מחוברים בטור, יש לחשב תחילה את המתח הנופל על שניהם יחד (המתח בין A ל-D), ולאחר מכן נחשב את המתח הנופל על C_3 לבדו, בעזרת כלל מחלק המתח לקבלים. מסלול מתחים בין A ל-D העובר דרך מקור המתח, נותן את מתח המקור בלבד. מכאן:

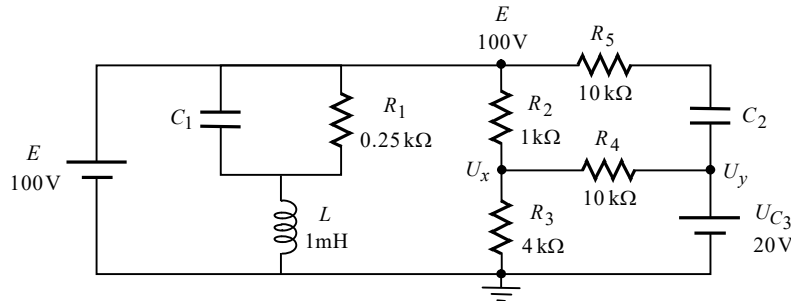
$$U_{C_{2-3}} = U_{CD} = E = 100(V)$$

$$U_y = U_{C_3} = \frac{E \cdot C_2}{C_2 + C_3} = \frac{100 \cdot 0.25\mu}{0.25\mu + 1\mu} = 20(V)$$

זרם הסליל הוא הזרם דרך R_1 . המתח על R_1 הוא מתח המקור. מכאן:

$$I_L = I_{R_1} = \frac{E}{R_1} = \frac{100}{0.25k} = 0.4(A)$$

ב. **ברגע ההתחלתי** לאחר סגירת המפסק S_2 , הקבלים עדיין שומרים על המתחים שהיו בהם לפני סגירת המפסק, וכן הסליל עדיין שומר על הזרם שהיה עובר דרכו. כפי שנראה מיד, לצורך הפתרון אנו זקוקים רק למתח על C_3 . בסעיף הקודם ראינו שהוא 20V. נחליף את C_3 במקור מתח של 20V, ונשרטט את המעגל המתקבל:



המתח בצומת העליון התקבל על ידי הליכה במסלול מתחים מצומת זה, דרך המקור, לאדמה. נחשב את המתח U_x בעזרת שיטת מתחי הצמתים:

$$\frac{U_x - E}{R_2} + \frac{U_x - U_y}{R_4} + \frac{U_x - 0}{R_3} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right) U_x = \frac{E}{R_2} + \frac{U_y}{R_4}$$

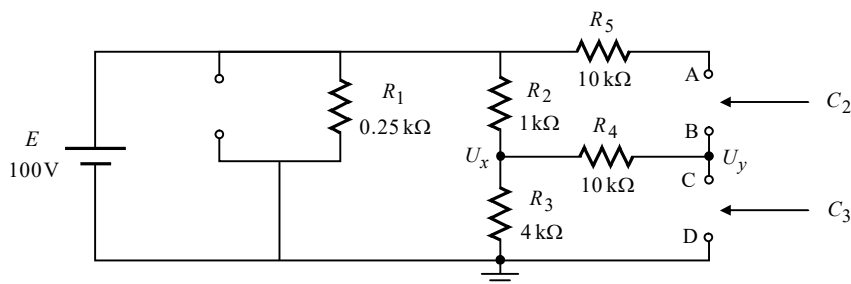
$$\left(\frac{1}{1k} + \frac{1}{10k} + \frac{1}{4k} \right) U_x = \frac{100}{1k} + \frac{20}{10k}$$

$$U_x = 75.555(V)$$

בשאלה ביקשו את הזרם העובר דרך המפסק S_2 . זהו הזרם העובר דרך R_4 . מכאן:

$$I_{S_2} = I_{R_4} = \frac{U_x - U_y}{R_4} = \frac{75.555 - 20}{10k} = 5.55(mA)$$

במצב המתמיד הקבלים נתק והסליל קצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



גם במעגל שהתקבל, המתח U_x הוא המתח על R_3 , ומקור המתח מחובר במקביל ל- R_2 ו- R_3 (הם בטור מכיוון שאין זרם כעת דרך R_4). נמצא שהמתח U_x יהיה כפי שחישבנו בסעיף א':

$$U_x = U_{R_3} = \frac{E \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 4k}{1k + 4k} = 80(V)$$

המתח U_y הוא המתח על C_3 . אולם יש לשים לב שבניגוד לסעיף א', כעת עקב סגירת המפסק הקבלים C_2 ו- C_3 אינם בטור. מסלול מתחים סביב C_3 (סביב נקודות C ו-D) נותן את המתח על R_3 . מכאן:

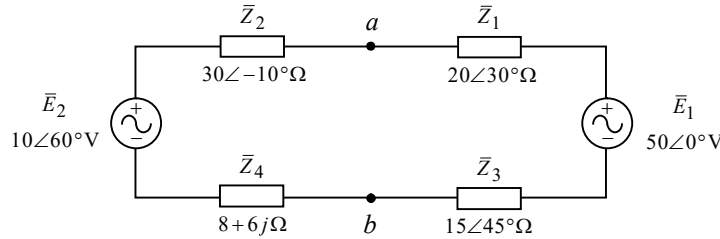
$$U_y = U_x = U_{R_3} = 80(\text{V})$$

לגבי הזרם דרך המפסק S_2 במצב המתמיד, זהו הזרם דרך R_4 . מהתבוננות בשרטוט האחרון ניתן להיווכח שזרם זה שווה לאפס. ובניסוח מתמטי:

$$I_{S_2(\infty)} = 0(\text{A})$$

שאלה 5

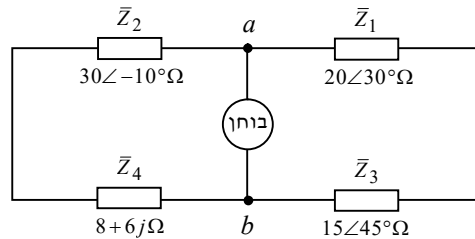
א. לשם נוחות הפתרון, נשרטט את המעגל כאשר הוא מסובב 90° ימינה:



נפתור בעזרת משפט מילמן:

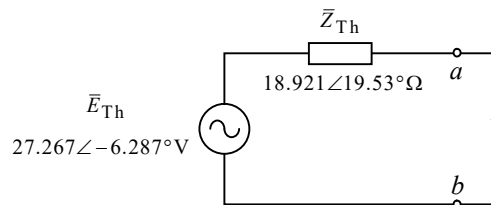
$$\bar{U}_{ab} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_4}}{\frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_4}} = \frac{\frac{50\angle 0^\circ}{20\angle 30^\circ + 15\angle 45^\circ} + \frac{10\angle 60^\circ}{30\angle -10^\circ + 8 + 6j}}{\frac{1}{20\angle 30^\circ + 15\angle 45^\circ} + \frac{1}{30\angle -10^\circ + 8 + 6j}} = 27.267\angle -6.287^\circ (\text{V})$$

ב. נוח יהיה לפתור סעיף זה בעזרת משפט תבנין (מהלך זה מועיל מאוד גם לסעיף הבא). המתח \bar{U}_{ab} שחישבנו בסעיף א' הוא למעשה \bar{E}_{Th} (שכן זהו המתח בין a ל- b כאשר נגד העומס מנותק). נחשב את \bar{Z}_{Th} . נקצר את מקורות המתח, נניח מקור בוחן בין a ל- b , ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$\bar{Z}_{Th} = \left(\frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_4} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20\angle 30^\circ + 15\angle 45^\circ} + \frac{1}{30\angle -10^\circ + 8 + 6j} \right)^{-1} = 17.833 + 6.325j = 18.921\angle 19.53^\circ (\Omega)$$

התבקשנו לחשב את הזרם כאשר יש חוט קצר בין a ל- b . נחבר חוט קצר למעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את הזרם המבוקש:



$$\bar{I}_{ab} = \frac{\bar{E}_{Th}}{\bar{Z}_{Th}} = \frac{27.267\angle -6.287^\circ}{18.921\angle 19.53^\circ} = 1.441\angle -25.818^\circ (\text{A})$$

ג. התנאי להעברת הספק מקסימלי עבור מקרה זה הוא:

$$R_L = |\bar{Z}_{Th}| = 18.921 (\Omega)$$

שאלה 6

א. מתח המקור נתון על ידי:

$$u(t) = 90\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) (\text{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית). הזווית נתונה ברדיאנים (כן נובע מאופן ההצגה שלה, ומכך שאין סימן של מעלות בצידה). הגודל π ברדיאנים שקול ל-180 מעלות. מכאן:

$$\phi = -\frac{\pi}{6} = -\frac{180^\circ}{6} = -30^\circ$$

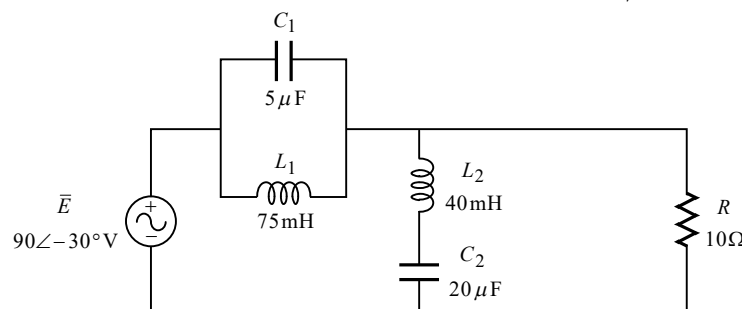
$$\bar{E} = \frac{90\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = 90 \angle -30^\circ (\text{V})$$

נתונים הערכים הנקובים של הנורה 20V/40W. נחשב את התנגדות הנורה:

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{20^2}{40} = 10 (\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל:



הנורה לא תאיר במצב של תהודה מקבילית בין C_1 ו- L_1 , שכן בתהודה מקבילית מסוג זה הקבל והסליל שקולים לנתק, ולכן לא יגיע כלל זרם לנורה. כמו כן הנורה לא תאיר במצב של תהודה טורית בין C_2 ו- L_2 , שכן בתהודה טורית הקבל והסליל שקולים לקצר, ולכן גם במקרה זה לא יגיע כלל זרם לנורה.

נחשב את תדר התהודה עבור כל אחד מהמקרים:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{75 \times 10^{-3} \cdot 5 \times 10^{-6}}} = 1632.993 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{40 \times 10^{-3} \cdot 20 \times 10^{-6}}} = 1118.033 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

נחשב את התדרים גם ביחידת מדידה Hz:

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{1632.993}{2\pi} = 259.898 (\text{Hz})$$

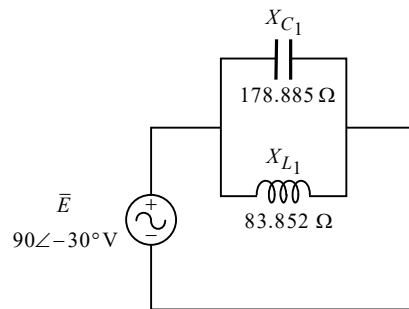
$$f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{1118.033}{2\pi} = 177.940 (\text{Hz})$$

ב. התדירות הנמוכה יותר היא ω_{02} . בתדירות זו כאמור C_2 ו- L_2 בתהודה טורית והם קצר. אולם יש לשים לב ש- C_1 ו- L_1 אינם בתהודה עבור תדירות זו. נחשב את ההיגבים של L_1 ושל C_1 המתקבלים עבור תדירות זו:

$$X_{L_1} = \omega_{02} \cdot L_1 = 1118.033 \cdot 75 \times 10^{-3} = 83.852(\Omega)$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega_{02} \cdot C_1} = \frac{1}{1118.033 \cdot 5 \times 10^{-6}} = 178.885(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל ונחשב את הזרם העובר דרך המקור:



$$\bar{Z}_T = \left(\frac{1}{jX_{L_1}} + \frac{1}{-jX_{C_1}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{j83.852} + \frac{1}{-j178.885} \right)^{-1} = j157.84(\Omega)$$

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_T} = \frac{90 \angle -30^\circ}{j157.84} = 0.57 \angle -120^\circ(\text{A})$$

ג. נתון $f = 318.31 \text{ Hz}$. נחשב את ההיגבי המעגל המתקבלים עבור תדר זה (תדר זה אינו תואם לאף אחד מהתדרים שחישבנו, ולכן אין כעת כלל מצב תהודה במעגל. סעיף זה הינו למעשה שאלה במעגלים מעורבים AC):

$$X_{L_1} = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 318.31 \cdot 75 \times 10^{-3} \approx 150(\Omega)$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 318.31 \cdot 5 \times 10^{-6}} \approx 100(\Omega)$$

$$X_{L_2} = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 318.31 \cdot 40 \times 10^{-3} \approx 80(\Omega)$$

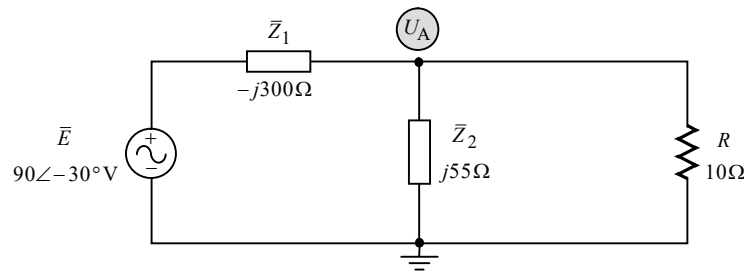
$$X_{C_2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 318.31 \cdot 20 \times 10^{-6}} \approx 25(\Omega)$$

לשם נוחות הפתרון נחשב שתי עכבות שקולות:

$$\bar{Z}_1 = \left(\frac{1}{jX_{L_1}} + \frac{1}{-jX_{C_1}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{j150} + \frac{1}{-j100} \right)^{-1} = -j300(\Omega)$$

$$\bar{Z}_2 = jX_{L_2} - jX_{C_2} = j80 - j25 = j55(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל ונחשב את ההספקים הנדרשים:



נפתור במילמן (הדבר יועיל גם לסעיף הבא):

$$\bar{U}_A = \frac{\frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{90\angle -30}{-j300}}{\frac{1}{-j300} + \frac{1}{j55} + \frac{1}{10}} = 2.967\angle 68.445^\circ (\text{V})$$

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{E} - \bar{U}_A}{\bar{Z}_1} = \frac{90\angle -30 - 2.967\angle 68.445^\circ}{-j300} = 0.301\angle 58.14^\circ (\text{A})$$

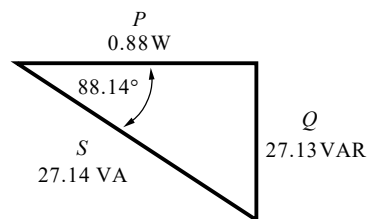
$$\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}_T^* = (90\angle -30)(0.301\angle -58.14^\circ) = 0.88 - 27.13j = 27.14\angle -88.14^\circ (\text{VA})$$

נציג את משולש ההספקים כנדרש בשאלה:

$$P = 0.88 (\text{W})$$

$$Q = 27.13 (\text{VAR})$$

$$S = 27.14 (\text{VA})$$



.ד

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_A - 0}{R} = \frac{2.967\angle 68.445^\circ}{10} = 0.296\angle 68.445^\circ (\text{A})$$

הערה: אין לעשות שימוש בערכים הנקובים בשאלה על מנת לחשב את הזרם דרך הנורה. אלה הם נתוני יצרן בלבד הנדרשים לפעולתה התקינה של הנורה, אך אינם תמיד הערכים בפועל. הערכים האמיתיים תלויים בנתוני המעגל אליו מחוברת הנורה. מכל מקום, **ההתנגדות** שחושבה על סמך נתונים אלה נשארה נכונה, שכן התנגדות זו אינה תלויה בנתוני המעגל.

שאלה 7

א. נתון שהתנגדות הסליל $r = 5\Omega$, והוא מוזן ממקור מתח ישר של 20V. נחשב את הזרם דרך הסליל:

$$I = \frac{E}{r} = \frac{20}{5} = 4(A)$$

עקום המגנטות נתון בשאלה. נחשב את μ_r בעזרת הנתונים שבגרף:

$$B = \mu_0 \mu_r H \Rightarrow$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1}{4\pi 10^{-7} \cdot 400} = 1989.436$$

נרכז את יתר הנתונים:

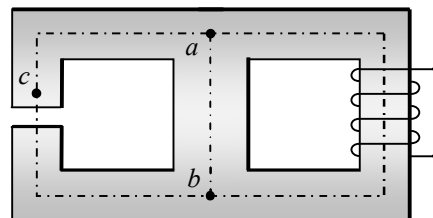
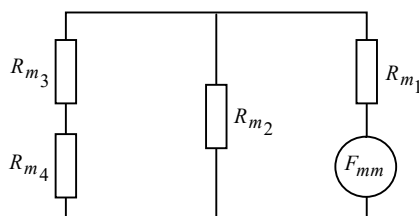
$$\begin{cases} \ell_{acb} = 120(\text{mm}) = 120 \times 10^{-3}(\text{m}) \\ A_{acb} = 200(\text{mm}^2) = 200 \times 10^{-6}(\text{m}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell_{ab} = 8(\text{cm}) = 8 \times 10^{-2}(\text{m}) \\ A_{ab} = 2(\text{cm}^2) = 2 \times 10^{-4}(\text{m}^2) \end{cases}$$

$$\ell_g = 1.5(\text{mm}) = 1.5 \times 10^{-3}(\text{m})$$

$$N = 250$$

נשרטט את "המעגל החשמלי" האנלוגי למעגל המגנטי הנתון:



ביאור: בעמוד הצדדי השמאלי יש חריץ אוויר. לא ציינו בשאלה שניתן להזניח את האורך שמוריד חריץ האוויר מאורך העמוד השמאלי, ולכן האורך של עמוד זה יהיה קטן במקצת ביחס לאורך של העמוד הימני (מכל מקום אין לדבר השפעה משמעותית על התוצאות). נבאר מה מציין כל מיאון:

- R_{m1} הוא המיאון של העמוד הימני.
- R_{m2} הוא המיאון של העמוד האמצעי.
- R_{m3} הוא המיאון של העמוד השמאלי.
- R_{m4} הוא המיאון של חריץ האוויר.

נחשב את ערכו של כל אחד מהמיאונים, ואת ערכו של המיאון הכללי:

$$R_{m_1} = \frac{\ell_{acb}}{\mu_0 \mu_r A_{acb}} = \frac{120 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 1989.436 \cdot 200 \times 10^{-6}} = 240 \times 10^3 \left(\frac{1}{H} \right)$$

$$R_{m_2} = \frac{\ell_{ab}}{\mu_0 \mu_r A_{ab}} = \frac{8 \times 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} \cdot 1989.436 \cdot 2 \times 10^{-4}} = 160 \times 10^3 \left(\frac{1}{H} \right)$$

$$R_{m_3} = \frac{\ell_{acb} - \ell_g}{\mu_0 \mu_r A_{acb}} = \frac{120 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 1989.436 \cdot 200 \times 10^{-6}} = 237 \times 10^3 \left(\frac{1}{H} \right)$$

$$R_{m_4} = \frac{\ell_g}{\mu_0 \mu_r A_{acb}} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 200 \times 10^{-6}} = 5.968 \times 10^6 \left(\frac{1}{H} \right)$$

$$R_{m_T} = \left(\frac{1}{R_{m_3} + R_{m_4}} + \frac{1}{R_{m_2}} \right)^{-1} + R_{m_1} =$$

$$= \left(\frac{1}{237 \times 10^3 + 5.968 \times 10^6} + \frac{1}{160 \times 10^3} \right)^{-1} + 240 \times 10^3 = 395.978 \times 10^3 \left(\frac{1}{H} \right)$$

ב.

$$L = \frac{N^2}{R_{m_T}} = \frac{250^2}{395.978 \times 10^3} = 0.157(H)$$

ג. נחשב תחילה את השטף ϕ ולאחר מכן את B . את השטף נחשב בצורה דומה לחישוב זרם במעגל חשמלי. נמצא תחילה את השטף הכללי, ולאחר מכן נמצא את השטף בחריץ האוויר בעזרת כלל מחלק השטף. נציין שהשטף בחריץ האוויר הינו למעשה השטף של העמוד השמאלי. מכאן:

$$\phi_T = \frac{F_{mm}}{R_{m_T}} = \frac{N \cdot I}{R_{m_T}} = \frac{250 \cdot 4}{395.978 \times 10^3} = 2.525(mWb)$$

$$\phi_{3-4} = \frac{\phi_T \cdot R_{m_2}}{R_{m_2} + R_{m_{3-4}}} = \frac{2.525 \times 10^{-3} \cdot 160 \times 10^3}{160 \times 10^3 + 237 \times 10^3 + 5.968 \times 10^6} = 63.478(\mu Wb)$$

$$B_{3-4} = \frac{\phi_{3-4}}{A_{3-4}} = \frac{63.478 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-6}} = 0.317(T)$$

ד. כעת המקור המזין את הסליל הוא מקור מתח חילופין $12V/1 kHz$. כידוע עבור מקור AC יש לסליל גם היגב, בנוסף להתנגדות האומית לעיל $r = 5\Omega$. מכאן:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 1000 \cdot 0.157 = 991.718(\Omega)$$

$$\bar{Z} = r + jX_L = 5 + j991.718(\Omega)$$

הערה: הנתון של גודל מתח המקור שהובא בסעיף זה (12V), אינו רלוונטי לשאלה.

שאלה 8

א. מכיוון שהמעגל הנתון מכיל מקורות מסוגים שונים (מקור DC, ושני מקורות AC עם תדירויות שונות) יש לפתור בסופרפוזיציה.

תרומת $v_1(t)$:

נתון :

$$v_1(t) = 20\sqrt{2} \sin(314t) \text{ (V)}$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית) :

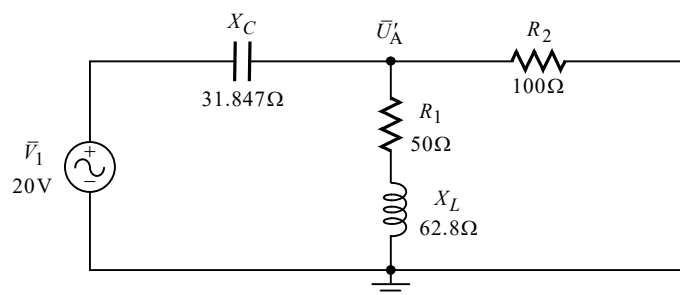
$$\bar{V}_1 = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20 \text{ (V)}$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה :

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0.2 = 62.8 \text{ (\Omega)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 100 \times 10^{-6}} = 31.847 \text{ (\Omega)}$$

נקצר את שאר המקורות, ונשרטט את המעגל המתקבל :



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את הזרם המבוקש :

$$\bar{U}_A = \frac{\frac{\bar{V}_1}{-jX_C}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{20}{-j31.847}}{\frac{1}{-j31.847} + \frac{1}{50 + j62.8} + \frac{1}{100}} = 22.424 \angle 39.356^\circ \text{ (V)}$$

$$\bar{I}_{R_1} = \frac{\bar{U}_A}{R_1 + jX_L} = \frac{22.424 \angle 39.356^\circ}{50 + j62.8} = 0.279 \angle -12.117^\circ \text{ (A)}$$

תרומת $v_2(t)$:

נתון :

$$v_2(t) = 100 \sin(628t + 120^\circ) \text{ (V)}$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית) :

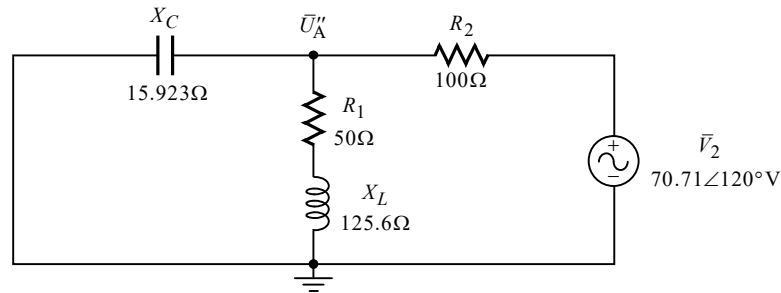
$$\bar{V}_2 = \frac{100 \angle 120^\circ}{\sqrt{2}} = 70.71 \angle 120^\circ \text{ (V)}$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L = \omega L = 628 \cdot 0.2 = 125.6 (\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{628 \cdot 100 \times 10^{-6}} = 15.923 (\Omega)$$

נקצר את שאר המקורות, ונשרטט את המעגל המתקבל:



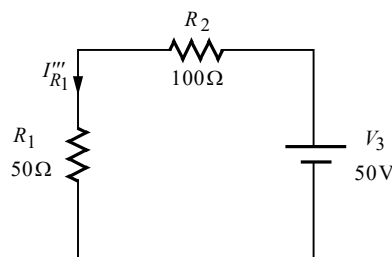
ניעזר במשפט מילמן ונחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{U}_A'' = \frac{\frac{\bar{V}_2}{R_2}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{70.71 \angle 120^\circ}{100}}{\frac{1}{-j15.923} + \frac{1}{50 + j125.6} + \frac{1}{100}} = 12.327 \angle 42.828^\circ (\text{V})$$

$$\bar{I}_{R_1}'' = \frac{\bar{U}_A''}{R_1 + jX_L} = \frac{12.327 \angle 42.828^\circ}{50 + j125.6} = 0.091 \angle -25.464^\circ (\text{A})$$

תרומת V_3 :

עבור מקור DC הסליל קצר והקבל נתק. נקצר את שאר המקורות, ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$I_{R_1}''' = \frac{V_3}{R_1 + R_2} = \frac{50}{50 + 100} = 0.33 (\text{A})$$

נסכם את התרומות: כל הזרמים שקיבלנו פועלים באותו כיוון ולכן יש לחבר ביניהם. את הזרם הכולל נציג כתלות בזמן. מכאן:

$$i_{R_1}(t) = i'(t) + i''(t) + i'''(t) = 0.279\sqrt{2} \sin(314t - 12.117^\circ) + 0.091\sqrt{2} \sin(628t - 25.464^\circ) + 0.33 (\text{A})$$

ב. הערך הממוצע של אותות סינוס משולבים עם DC שווה תמיד לערך ה-DC. מכאן:

$$I_{R_1(\text{av})} = I_{R_1}''' = 0.33(\text{A})$$

ג. את הערך היעיל השקול נחשב בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$I_{R_1(\text{rms})} = \sqrt{I_{\text{rms}1}^2 + I_{\text{rms}2}^2 + I_{\text{rms}3}^2} = \sqrt{0.279^2 + 0.091^2 + 0.33^2} = 0.444(\text{A})$$

ד. את ההספק הממוצע מחשבים תמיד בעזרת הערך היעיל:

$$P_{R_1} = I_{R_1(\text{rms})}^2 \cdot R_1 = 0.444^2 \cdot 50 = 9.873(\text{W})$$