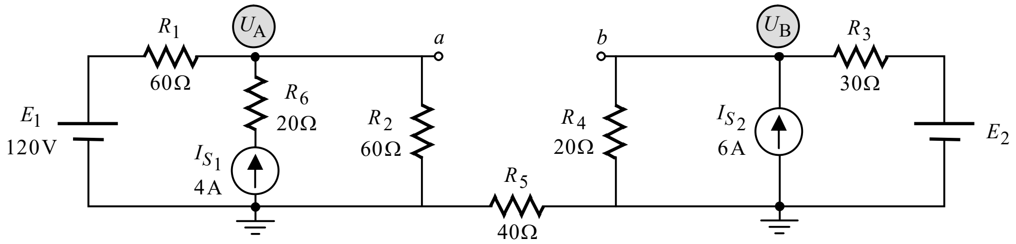
פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2023 מועד א׳

שאלה 1

א.



היות ויש נתק בין A ל-B, שני חלקי המעגל מתפקדים כשני מעגלים נפרדים. אין זרם דרך הנגד R_5, ולכן המתח עליו הוא אפס. מכיוון שכך, יש אותו הפוטנציאל בשני הדקיו (נגד שאין דרכו זרם, שקול לתיל מוליך חסר התנגדות). מכאן שאם נקבע צד אחד של R_5 כאדמה (פוטנציאל אפס), גם הצד השני שלו יהיה אדמה, וכפי שציינו על גבי המעגל.

נחשב תחילה את U_A בחלק המעגל השמאלי בעזרת משפט מילמן:

$$U_A=\frac{\frac{E_1}{R_1}+I_{S_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=\frac{\frac{120}{60}+4}{\frac{1}{60}+\frac{1}{60}}=180\left(\mathrm{V}\right)$$

נתון בשאלה שהפוטנציאל U_A גדול מ- U_B ב-104V. מכאן:

$$U_B=U_A-104=180-104=76\left(\mathrm{V}\right)$$

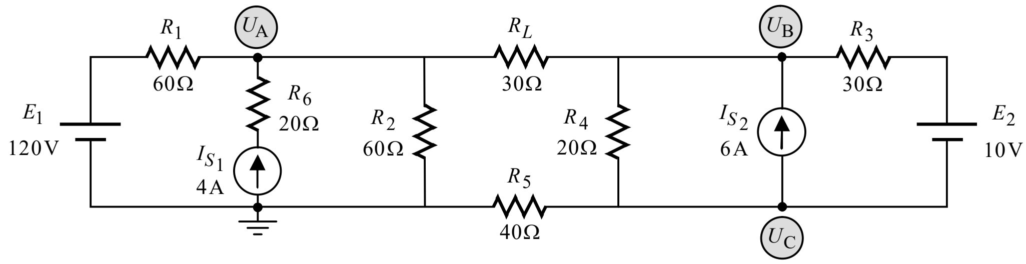
כעת נפעיל את משפט מילמן על חלק המעגל הימני ונחשב את E_2:

$$U_B=\frac{\frac{E_2}{R_3}+I_{S_2}}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}$$

$$76=\frac{\frac{E_2}{30}+6}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}}$$

$$E_2=10\left(\mathrm{V}\right)$$

ב. נחבר את R_L אל המעגל ונשרטט את המעגל המתקבל:



נפתור במתחי צמתים. נציין שבדרך פתרון זו, הערכים של U_A ו- U_B מהסעיף הקודם אינם רלוונטיים לסעיף זה, שהרי המעגל השתנה כעת (אולם הערך של E_2 שמצאנו נשאר נכון לסעיף זה, שהרי מדובר בגודל המתח של המקור, שלא השתנה). אנו נניח כתמיד שכל הזרמים יוצאים מכל צומת וצומת (מלבד הזרמים בענפים שעליהם מקור זרם).

<u>צומת A:</u>

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A:

שלב א': $$(\text{A})\ \ I_{R_1} - I_{S_1} + I_{R_2} + I_{R_L} = 0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם):

שלב ב': $$(\text{A})\ \ \frac{U_A - E_1}{R_1} - I_{S_1} + \frac{U_A - 0}{R_2} + \frac{U_A - U_B}{R_L} = 0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג': $$(\text{A})\ \ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L}\right)U_A - \left(\frac{1}{R_L}\right)U_B + 0 \cdot U_C = \frac{E_1}{R_1} + I_{S_1}$$

הערה: נתנו ייצוג ל- U_C במשוואת צומת A, זאת כהכנה להצבה במחשבון. מכיוון ש- U_C לא מופיע כלל במשוואה זו, הוא קיבל ערך של אפס. באופן דומה ננהג לגבי U_A במשוואה של צומת C שבהמשך.

נציב ערכים:

שלב ד': $$(\text{A})\ \ \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{30}\right)U_A - \left(\frac{1}{30}\right)U_B + 0 \cdot U_C = \frac{120}{60} + 4$$

<u>צומת B:</u>

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B:

שלב א': $$(\text{B})\ \ I_{R_3} - I_{S_2} + I_{R_4} + I'_{R_L} = 0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם):

שלב ב': $$(\text{B})\ \ \frac{U_B - E_2 - U_C}{R_3} - I_{S_2} + \frac{U_B - U_C}{R_4} + \frac{U_B - U_A}{R_L} = 0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג': $$(\text{B})\ -\left(\frac{1}{R_L}\right)U_A + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_L}\right)U_B - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_C = \frac{E_2}{R_3} + I_{S_2}$$

נציב ערכים:

שלב ד': $$(\text{B})\ -\left(\frac{1}{30}\right)U_A + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)U_B - \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20}\right)U_C = \frac{10}{30} + 6$$

צומת C:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת C :

שלב א':
$$(\mathrm{C})\ I'_{R_3} + I_{S_2} + I'_{R_4} + I_{R_5} = 0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד כמובן הזרם של מקור הזרם) :

שלב ב':
$$(\mathrm{C})\ \frac{U_\mathrm{C} + E_2 - U_\mathrm{B}}{R_3} + I_{S_2} + \frac{U_\mathrm{C} - U_\mathrm{B}}{R_4} + \frac{U_\mathrm{C} - 0}{R_5} = 0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו :

שלב ג':
$$(\mathrm{C})\ 0\cdot U_\mathrm{A} - \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_\mathrm{B} + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_\mathrm{C} = -\frac{E_2}{R_3} - I_{S_2}$$

נציב ערכים :

שלב ד':
$$(\mathrm{C})\ 0\cdot U_\mathrm{A} - \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)U_\mathrm{B} + \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)U_\mathrm{C} = -\frac{10}{30} - 6$$

לסיכום:

קיבלנו שלוש משוואות בשלושה נעלמים :

$$\begin{cases}(\mathrm{A})\ \left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+\frac{1}{30}\right)U_\mathrm{A} - \left(\frac{1}{30}\right)U_\mathrm{B} + 0\cdot U_\mathrm{C} = \frac{120}{60} + 4 \\ (\mathrm{B}) - \left(\frac{1}{30}\right)U_\mathrm{A} + \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)U_\mathrm{B} - \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)U_\mathrm{C} = \frac{10}{30} + 6 \\ (\mathrm{C})\ 0\cdot U_\mathrm{A} - \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)U_\mathrm{B} + \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)U_\mathrm{C} = -\frac{10}{30} - 6\end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן :

$$U_\mathrm{A} = 152.142(\mathrm{V})$$

$$U_\mathrm{B} = 124.285(\mathrm{V})$$

$$U_\mathrm{C} = 37.142(\mathrm{V})$$

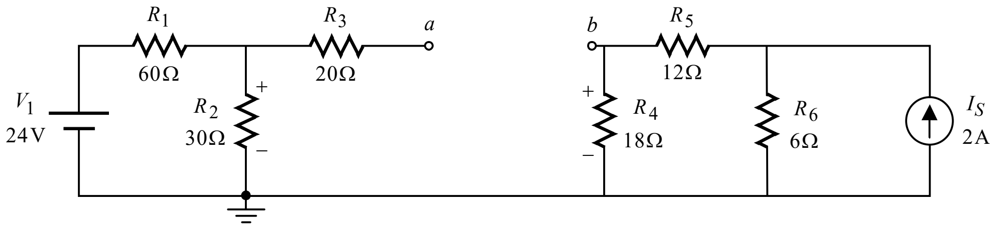
קיבלנו ש- U_A גדול מ- E_1, ולכן הזרם נכנס להדק החיובי של E_1. מכאן שמקור זה הוא **צרכן**. נחשב את גודל ההספק שלו :

$$I_{E_1} = \frac{U_\mathrm{A} - E_1}{R_1} = \frac{152.142 - 120}{60} = 0.535(\mathrm{A})$$

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 120\cdot 0.535 = 64.285(\mathrm{W})$$

שאלה 2

א. **חישוב מתח תבנין:**



ביאור: הנתק בין A ל-B גורם לכך ששני חלקי המעגל מתפקדים כשני מעגלים נפרדים, כך שלא עובר זרם מחֶלק אחד של המעגל לשני. מתח תבנין המבוקש הוא המתח בין a ל-b. נוכל לקבל מתח זה בעזרת מסלול מתחים בין הנקודות, העובר דרך R_3, R_2, R_4. לשם כך עלינו לחשב את מתחי הנגדים שבמסלול.

בחלק השמאלי של המעגל ישנו מעגל טורי פשוט (שהרי R_3 מנותק ולכן המתח והזרם שלו הם אפס). נחשב את המתח הנופל על R_2 בעזרת כלל מחלק המתח:

$$U_{R_2}=\frac{V_1\cdot R_2}{R_1+R_2}=\frac{24\cdot 30}{60+30}=8(\mathrm{V})$$

נעבור לחלק המעגל הימני. נחשב את הזרם העובר דרך R_4 בעזרת כלל מחלק הזרם, ומשם את המתח של נגד זה:

$$I_{R_{4-5}}=\frac{I_S\cdot R_6}{R_{4-5}+R_6}=\frac{2\cdot 6}{18+12+6}=0.333(\mathrm{A})$$

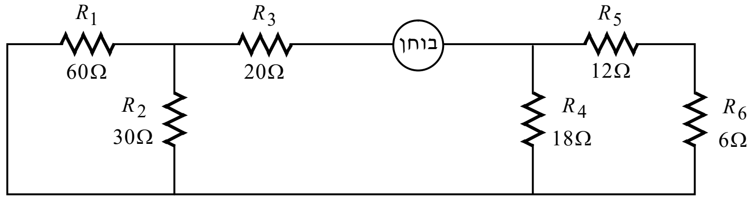
$$U_{R_4}=I_{R_{4-5}}\cdot R_4=0.333\cdot 18=6(\mathrm{V})$$

נצא למסלול מתחים בין a ל-b. קוטביות מתחי הנגדים שבמסלול סומנה מראש על גבי המעגל (בנגד, נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). מכאן:

$$E_{\mathrm{Th}}=U_{ab}=U_{R_3}+U_{R_2}-U_{R_4}=0+8-6=2(\mathrm{V})$$

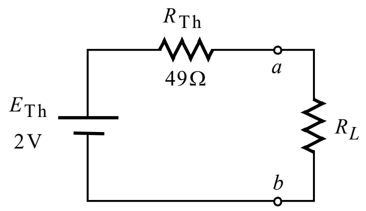
חישוב התנגדות תבנין:

נקצר את מקור המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחן בין a ל-b, ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$R_{\mathrm{Th}}=R_3+R_1\parallel R_2+R_4\parallel R_{5-6}=20+\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{30}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{12+6}\right)^{-1}=49(\Omega)$$

נשרטט את המעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ב.　התנאי להעברת הספק מקסימלי במעגלי DC הוא:

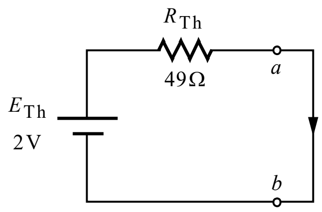
$$R_L = R_{\text{Th}} = 49(\Omega)$$

נוכל לחשב את ההספק של R_L בקלות בעזרת המעגל תבנין שקיבלנו:

$$I_{R_L} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{2}{49+49} = 0.020(\text{A}) = 20.408(\text{mA})$$

$$P_{R_L} = {I_{R_L}}^2 \cdot R_L = (20.408\text{m})^2 \cdot 49 = 0.020(\text{W}) = 20.408(\text{mW})$$

ג.　נוכל להיעזר במעגל תבנין שקיבלנו. נחבר חוט קצר בין a ל-b ונחשב את הזרם דרכו:



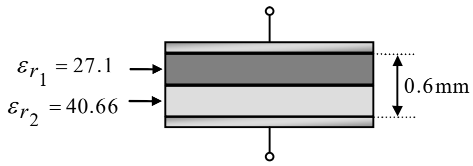
נחשב את גודל הזרם:

$$I_{ab} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} = \frac{2}{49} = 0.040(\text{A}) = 40.816(\text{mA})$$

כאשר חישבנו את E_{Th} יצאנו למסלול מתחים מנקודה a, וקיבלנו לבסוף תוצאה חיובית. הדבר אומר שנקודה a גבוהה מנקודה b, ולכן כיוונו של E_{Th} הוא כמתואר באיור (ההדק החיובי שלו פונה לנקודה a). הלכך **כיוון הזרם דרך חוט הקצר הוא כלפי מטה, מ-a ל-b**. ביאור מלא אודות "שיטת המסלולים" לחישוב מתח בין שתי נקודות, ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי זרם ישר.

שאלה 3

א. נתבונן על הקבל C_X :



שני הדיאלקטרנים שבקבל מחוברים זה אחר זה. במצב זה ניתן לראות קבל זה כשני קבלים המחוברים בטור, וכפי המובא בשאלה.

נחשב תחילה את הקיבול של כל שכבה בנפרד. נסדר את הנתונים. שטח הלוחות הינו :

$$A=0.5\left(\text{cm}^2\right)=0.5\times10^{-4}\left(\text{m}^2\right)$$

עוד נתון כי לשתי השכבות עובי זהה. מכאן :

$$d_1=d_2=\frac{0.6}{2}=0.3(\text{mm})=0.3\times10^{-3}(\text{m})$$

הקבוע הדיאלקטרי היחסי ε_r של כל חומר נתון בשרטוט. מכאן :

$$C_{\text{X}_1}=\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r_1}A}{d_1}=\frac{8.854\times10^{-12}\cdot27.1\cdot0.5\times10^{-4}}{0.3\times10^{-3}}\approx40(\text{pF})$$

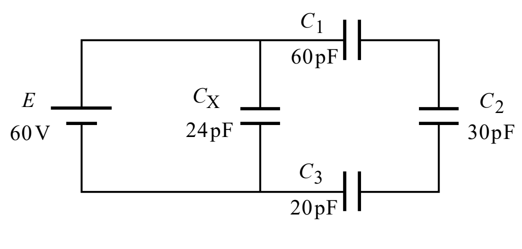
$$C_{\text{X}_2}=\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r_2}A}{d_2}=\frac{8.854\times10^{-12}\cdot40.66\cdot0.5\times10^{-4}}{0.3\times10^{-3}}\approx60(\text{pF})$$

נחשב את הקיבול השקול של C_X על ידי הנוסחה לחיבור קבלים בטור :

$$C_\text{X}=\left(\frac{1}{C_{\text{X}_1}}+\frac{1}{C_{\text{X}_2}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{40\text{p}}+\frac{1}{60\text{p}}\right)^{-1}=24(\text{pF})$$

ביאור מלא אודות קבלים שבתוכם סוגים שונים של דיאלקטרנים, ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק בקבל וקיבול.

ב. נשרטט את המעגל המתקבל :



המתח על C_X הוא מתח המקור. מכאן :

$$U_{C_\text{X}}=E=60(\text{V})$$

$$Q_{C_\text{X}}=U_{C_\text{X}}\cdot C_\text{X}=60\cdot24\text{p}=1440(\text{pC})$$

נחשב את הקיבול השקול של C_{1-3} :

$$C_{1-3}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{60\text{p}}+\frac{1}{30\text{p}}+\frac{1}{20\text{p}}\right)^{-1}=10(\text{pF})$$

המתח על הקבל השקול C_{1-3} הוא מתח המקור. נחשב את המטען של קבל זה :

$$Q_{C_{1-3}}=E\cdot C_{1-3}=60\cdot 10\text{p}=600(\text{pC})$$

מכיוון שהקבלים C_1, C_2, C_3 מחוברים בטור יש להם מטען זהה. זהו המטען השקול שמצאנו. מכאן :

$$Q_{C_1}=Q_{C_2}=Q_{C_3}=Q_{C_{1-3}}=600(\text{pC})$$

$$U_{C_1}=\frac{Q_{C_1}}{C_1}=\frac{600\text{p}}{60\text{p}}=10(\text{V})$$

$$U_{C_2}=\frac{Q_{C_2}}{C_2}=\frac{600\text{p}}{30\text{p}}=20(\text{V})$$

$$U_{C_3}=\frac{Q_{C_3}}{C_3}=\frac{600\text{p}}{20\text{p}}=30(\text{V})$$

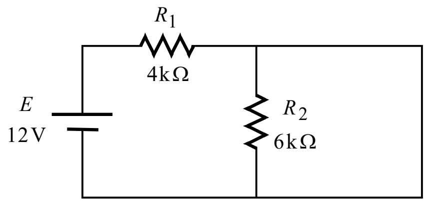
ג.

$$C_{\text{T}}=C_{\text{X}}+C_{1-3}=24\text{p}+10\text{p}=34(\text{pF})$$

$$W_{\text{T}}=\frac{C_{\text{T}}\cdot E^2}{2}=\frac{34\text{p}\cdot 60^2}{2}=61.2(\text{nJ})$$

שאלה 4

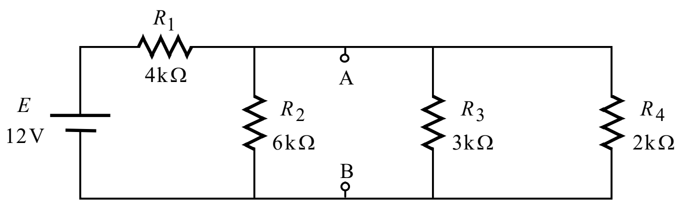
א. ברגע ההתחלתי לאחר סגירת שני המפסקים הקבל שקול לקֶצֶר, והסלילים לנֶתֶק. נשרטט את המעגל המתקבל:



הקצר הקיים במקום הקבל גורם לקיצורו של R_2 . מכאן:

$$I_{\left(t=0^+\right)}=\frac{E}{R_1}=\frac{12}{4\text{k}}=3\left(\text{mA}\right)$$

ב. בתום כל תופעות המעבר הקבל שקול לנֶתֶק והסלילים לקֶצֶר. נשרטט את המעגל המתקבל:



האנרגיה האגורה במעגל היא האנרגיה האגורה בקבל ובסלילים יחד. נחשב תחילה את מתח הקבל. זהו המתח בין A ל-B. ניעזר במשפט מילמן ונקבל:

$$U_C=U_{\text{AB}}=\frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}=\frac{\frac{12}{4\text{k}}}{\frac{1}{4\text{k}}+\frac{1}{6\text{k}}+\frac{1}{3\text{k}}+\frac{1}{2\text{k}}}=2.4\left(\text{V}\right)$$

נחשב את הזרם העובר דרך כל סליל:

$$I_{L_1}=I_{R_3}=\frac{U_{\text{AB}}}{R_3}=\frac{2.4}{3\text{k}}=0.8\left(\text{mA}\right)$$

$$I_{L_2}=I_{R_4}=\frac{U_{\text{AB}}}{R_4}=\frac{2.4}{2\text{k}}=1.2\left(\text{mA}\right)$$

נחשב את האנרגיה בקבל ובסלילים, ואת האנרגיה הכוללת:

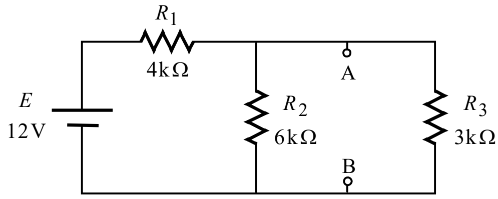
$$W_C=\frac{C\cdot {U_C}^2}{2}=\frac{2\text{n}\cdot 2.4^2}{2}=5.76\left(\text{nJ}\right)$$

$$W_{L_1}=\frac{L_1\cdot {I_{L_1}}^2}{2}=\frac{20\text{m}\cdot\left(0.8\text{m}\right)^2}{2}=6.4\left(\text{nJ}\right)$$

$$W_{L_2}=\frac{L_2\cdot {I_{L_2}}^2}{2}=\frac{6\text{m}\cdot\left(1.2\text{m}\right)^2}{2}=4.32\left(\text{nJ}\right)$$

$$W_{\text{T}}=W_C+W_{L_1}+W_{L_2}=5.76\text{n}+6.4\text{n}+4.32\text{n}=16.48\left(\text{nJ}\right)$$

ג. נשרטט את המעגל המתקבל:



נפתור בדרך דומה לדרך של הסעיף הקודם:

$$U_C = U_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{12}{4k}}{\frac{1}{4k}+\frac{1}{6k}+\frac{1}{3k}} = 4(V)$$

$$I_{L_1} = I_{R_3} = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{4}{3k} = 1.333(mA)$$

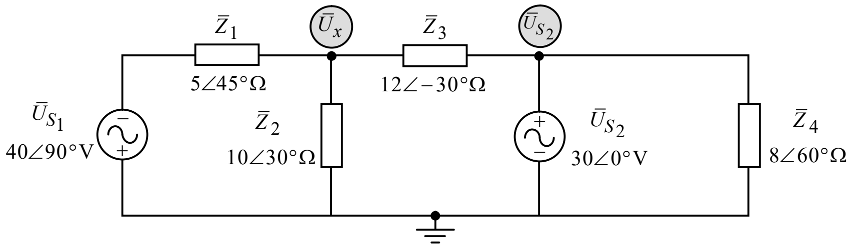
$$W_C = \frac{C \cdot {U_C}^2}{2} = \frac{2n \cdot 4^2}{2} = 16(nJ)$$

$$W_{L_1} = \frac{L_1 \cdot {I_{L_1}}^2}{2} = \frac{20m \cdot (1.333m)^2}{2} = 17.777(nJ)$$

$$W_T = W_C + W_{L_1} = 16n + 17.777n = 33.777(nJ)$$

שאלה 5

א.



המתח בצומת העליון הימני הוא המתח $\bar{U}_{S_2}$. מתח זה התקבל על ידי הליכה במסלול מצומת זה, דרך $\bar{U}_{S_2}$, לאדמה. נחשב את המתח $\bar{U}_x$ בעזרת מתחי צמתים. אנו מניחים כתמיד שכל הזרמים יוצאים מהצומת. נרשום את משוואת הזרמים לצומת:

שלב א':

$$\bar{I}_{Z_1}+\bar{I}_{Z_2}+\bar{I}_{Z_3}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב':

$$\frac{\bar{U}_x+\bar{U}_{S_1}}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_x-0}{\bar{Z}_2}+\frac{\bar{U}_x-\bar{U}_{S_2}}{\bar{Z}_3}=0$$

נסדר את המשוואה:

שלב ג':

$$\left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}\right)\bar{U}_x=\frac{\bar{U}_{S_2}}{\bar{Z}_3}-\frac{\bar{U}_{S_1}}{\bar{Z}_1}$$

נציב ערכים:

שלב ד':

$$\left(\frac{1}{5\angle45°}+\frac{1}{10\angle30°}+\frac{1}{12\angle-30°}\right)\bar{U}_x=\frac{30\angle0°}{12\angle-30°}-\frac{40\angle90°}{5\angle45°}$$

פתרון המשוואה נותן:

$$\bar{U}_x=16.760\angle-101.878°(\text{V})$$

ב. **<u>הקדמה לסעיף:</u>**

אנו נחשב את הספקי מקורות המתח בעזרת הנוסחה:

$$\bar{S}=\bar{U}\cdot\bar{I}^*$$

בסעיף הבא אנו מתבקשים לבצע מאזן הספקים להספק המרוכב $\bar{S}$. **לשם כך עלינו לחשב מראש את הספקי המקורות, באופן כזה שייתן לנו מידע מי צרכן ומי ספק**. לאחר מכן נוכל לבצע מאזן הספקים, על ידי שנחבר כל ההספקים המרוכבים $\bar{S}$ של כל רכיבי המעגל, ונבדוק האם אנו מקבלים תוצאה של אפס, וכפי שנראה.

נציג כאן בקצרה את השיטה המופיעה בספר "תורת החשמל להנדסאים" שבהוצאתנו, לקביעת מקור כספק או כצרכן, במעגלי זרם חילופין:

בשלב ראשון נבחן אם המתח והזרם של המקור הם באותו הכיוון. אם הם בכיוונים מנוגדים, נחשב את ההספקים כרגיל בעזרת הנוסחה $\bar{S}=\bar{U}\cdot\bar{I}^*$. אם הם באותו הכיוון, נציב סימן שלילי בשעת חישוב ההספק באופן הבא $\bar{S}=-\bar{U}\cdot\bar{I}^*$.

בשלב שני נתבונן על הזווית של ההספק $\bar{S}$. אם היא בטווח שבין $90°$ ל- $-90°$ המקור צרכן. אם היא מעבר לטווח זה המקור ספק (הרחבה נוספת על שיטה זו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק בהספק ואנרגיה במעגלי זרם חילופין).

נציין שבשאלה זו אנו נחשב את המתחים והזרמים של המקורות באופן כזה, כך שהמתח והזרם שלהם יהיו באותו הכיוון, מה שאומר שנציב סימן שלילי בחישוב ההספק (ב-AC ניתן להניח כיוון כרצוננו, אם אין אילוץ אחר בשאלה).

נחשב את הזרם העובר דרך $\bar{U}_{S_1}$, בעזרת ביטוי הזרם המופיע בשלב ב' לעיל של מתחי הצמתים. מכאן:

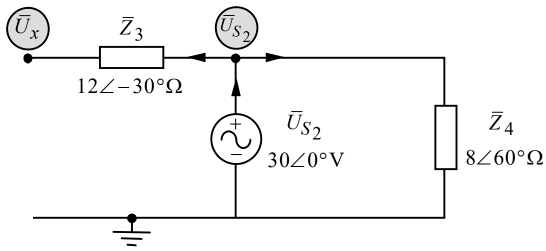
$$\bar{I}_{U_{S_1}} = \bar{I}_{Z_1} = \frac{\bar{U}_x + \bar{U}_{S_1}}{\bar{Z}_1} = \frac{16.760\angle -101.878° + 40\angle 90°}{5\angle 45°} = 4.769\angle 53.317°(\mathrm{A})$$

ביטוי זה של הזרם מבוסס על ההנחה שהזרם יוצא מהצומת (כאמור לעיל בסעיף א'). נמצא שהמתח והזרם של מקור זה הם באותו הכיוון. מכאן:

$$\bar{S}_{U_{S_1}} = -\bar{U}_{S_1} \cdot \bar{I}^*_{U_{S_1}} = -(40\angle 90°)(4.769\angle -53.317°) = 190.797\angle -143.317°(\mathrm{VA})$$

הזווית של $\bar{S}_{U_{S_1}}$ מעבר לטווח של $90°$, ולכן מקור זה **ספק**.

נחשב כעת את הזרם של $\bar{U}_{S_2}$. נתבונן על קטע המעגל הבא:



נחשב את הזרם דרך $\bar{Z}_3$ בהתאם לכיוון אותו בחרנו, המסומן באיור (כלומר נחסר $\bar{U}_{S_2} - \bar{U}_x$ ולא להיפך). באופן דומה ננהג לגבי הזרם של $\bar{Z}_4$. מכאן:

$$\bar{I}_{Z_3} = \frac{\bar{U}_{S_2} - \bar{U}_x}{\bar{Z}_3} = \frac{30\angle 0° - 16.760\angle -101.878°}{12\angle -30°} = 3.104\angle 56.119°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{Z_4} = \frac{\bar{U}_{S_2} - 0}{\bar{Z}_4} = \frac{30\angle 0° - 0}{8\angle 60°} = 3.75\angle -60°(\mathrm{A})$$

כעת על פי חוק הזרמים מתקבל:

$$\bar{I}_{U_{S_2}} = \bar{I}_{Z_3} + \bar{I}_{Z_4} = 3.104\angle 56.119° + 3.75\angle -60° = 3.667\angle -10.529°(\mathrm{A})$$

המתח והזרם של $\bar{U}_{S_2}$ באותו הכיוון, ולכן נציב סימן שלילי בחישוב ההספק שלו. מכאן:

$$\bar{S}_{U_{S_2}} = -\bar{U}_{S_2} \cdot \bar{I}^*_{U_{S_2}} = -(30\angle 0°)(3.667\angle +10.529°) = 110.022\angle -169.470°(\mathrm{VA})$$

הזווית של $\bar{S}_{U_{S_2}}$ מעבר לטווח של $90°$, ולכן גם מקור זה **ספק**.

ג. חישבנו כבר את הזרמים של כל העכבות, מלבד את הזרם של $\bar{Z}_2$. נחשב תחילה זרם זה, ואת המתח של כל עכבה. מכאן :

$$\bar{I}_{Z_2}=\frac{\bar{U}_x-0}{\bar{Z}_2}=\frac{16.760\angle-101.878°}{10\angle30°}=1.676\angle-131.878°(\mathrm{A})$$

$$\bar{U}_{Z_1}=\bar{I}_{Z_1}\cdot\bar{Z}_1=(4.769\angle53.317°)(5\angle45°)=23.849\angle98.317°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_2}=\bar{I}_{Z_2}\cdot\bar{Z}_2=(1.676\angle-131.878°)(10\angle30°)=16.760\angle-101.878°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_3}=\bar{I}_{Z_3}\cdot\bar{Z}_3=(3.104\angle56.119°)(12\angle-30°)=37.254\angle26.119°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_4}=\bar{I}_{Z_4}\cdot\bar{Z}_4=(3.75\angle-60°)(8\angle60°)=30(\mathrm{V})$$

נחשב את הספקי העכבות (בעכבות תמיד המתח והזרם שלהם בכיוונים מנוגדים, ולכן נחשב את ההספק "כרגיל", מבלי להציב סימן שלילי) :

$$\bar{S}_{Z_1}=\bar{U}_{Z_1}\cdot\bar{I}_{Z_1}^{*}=(23.849\angle98.317°)(4.769\angle-53.317°)=113.761\angle45°(\mathrm{VA})$$

$$\bar{S}_{Z_2}=\bar{U}_{Z_2}\cdot\bar{I}_{Z_2}^{*}=(16.760\angle-101.878°)(1.676\angle+131.878°)=28.089\angle30°(\mathrm{VA})$$

$$\bar{S}_{Z_3}=\bar{U}_{Z_3}\cdot\bar{I}_{Z_3}^{*}=(37.254\angle26.119°)(3.104\angle-56.119°)=115.657\angle-30°(\mathrm{VA})$$

$$\bar{S}_{Z_4}=\bar{U}_{Z_4}\cdot\bar{I}_{Z_4}^{*}=(30)(3.75\angle+60°)=112.5\angle60°(\mathrm{VA})$$

נסכם. ההספק המרוכב **המושקע** הכולל הוא :

$$\bar{S}_{\mathrm{T}\,\text{מושקע}}=\bar{S}_{U_{S_1}}+\bar{S}_{U_{S_2}}=190.797\angle-143.317°+110.022\angle-169.470°=293.588\angle-152.824°(\mathrm{VA})$$

ההספק המרוכב **הנצרך** הכולל הוא :

$$\bar{S}_{\mathrm{T}\,\text{נצרך}}=\bar{S}_{Z_1}+\bar{S}_{Z_2}+\bar{S}_{Z_3}+\bar{S}_{Z_4}=$$
$$=113.761\angle45°+28.089\angle30°+115.657\angle-30°+112.5\angle60°=293.588\angle27.175°(\mathrm{VA})$$

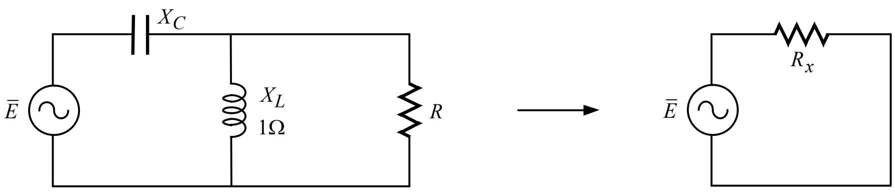
מהתוצאות שקיבלנו ניתן להיווכח כי שני ההספקים, המושקע והנצרך, שווים בגודלם, והזוויות שלהם הופכיות – הפרש של $180°$ בדיוק, השקול לסימן שלילי במעגלי DC (אם נכפיל את אחד ההספקים ב-1– נקבל בדיוק את השני). לצורך מאזן ההספקים, נחבר כאמור בין ההספקים, ונבחן האם אכן אנו מקבלים תוצאה של אפס :

$$\bar{S}_{\mathrm{T}}=\bar{S}_{\mathrm{T}\,\text{מושקע}}+\bar{S}_{\mathrm{T}\,\text{נצרך}}=293.588\angle-152.824°+293.588\angle27.175°=0(\mathrm{VA})$$

<u>הערה:</u> תוצאה של אפס בדיוק תתקבל כאשר עושים שימוש בזכרונות המחשבון, כך שכל הספרות אחרי הנקודה נלקחות בחשבון.

שאלה 6

א. נשרטט את המעגל המקורי ואת המעגל בתהודה:



המעגל המקורי המעגל בתהודה

בתהודה עכבת המעגל מורכבת מהתנגדות ממשית בלבד, ללא j (תנאי זה נכון לכל סוגי התהודה). סימַנו התנגדות זו כאן ב- R_x. בשאלה נתונים מתח והספק ממשי – $5V$, $50W$.
על פי צורת החיבור של מכשירי המדידה עולה, שאלֶה הם המתח וההספק של המקור.
עוד נתון שהמעגל בתהודה. בתהודה כאמור ישנו נגד אחד במעגל R_x. מכאן שהמתח וההספק הנתונים של המקור, הם גם המתח וההספק של הנגד R_x (על פי אופן הצגתו, המתח הנתון הוא מתח אפקטיבי). מכאן:

$$P = \frac{E^2}{R_x} \quad \Rightarrow$$

$$R_x = \frac{E^2}{P} = \frac{5^2}{50} = 0.5(\Omega)$$

כעת יש לשים לב שהנגד R_x אינו הנגד R שבמעגל המקורי, אלא הוא נגד חדש המתקבל מחישוב ההתנגדות השקולה של המעגל. ניתן לקבל ביטוי לנגד זה בעזרת הנוסחה להמרת עכבה מחיבור מקבילי לטורי:

$$R_S = \frac{R_P X_P{}^2}{R_P{}^2 + X_P{}^2}$$

בנוסחה זו, הנגד R_S הוא הנגד הטורי R_x ה"חדש", הנגד R_P וההיגב X_P הם בהתאמה ההתנגדות וההיגב שהיו במקביל – הנגד R והיגב הסליל X_L. נציב ערכים בנוסחה זו:

$$R_x = \frac{R \cdot X_L{}^2}{R^2 + X_L{}^2} = \frac{R \cdot 1^2}{R^2 + 1^2}$$

קיבלנו לעיל כאמור ש- $R_x = 0.5\Omega$. נציב במשוואה האחרונה ונקבל:

$$0.5 = \frac{R \cdot 1^2}{R^2 + 1^2} \quad \Rightarrow$$

$$0.5R^2 - 1R + 0.5 = 0$$

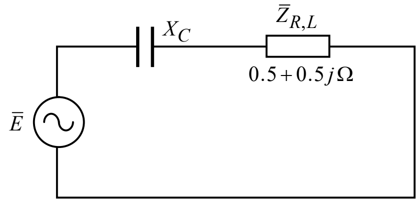
קיבלנו משוואה ריבועית. שני הפתרונות של משוואה זו הם זהים:

$$R = 1(\Omega)$$

ב. נחשב את העכבה השקולה של הסליל והנגד :

$$\bar{Z}_{R,L}=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{jX_L}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{j1}\right)^{-1}=0.5+0.5j(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל לאחר צמצום זה האחרון, ונציין על גביו את הידוע לנו :



התנאי לתהודה הינו כאמור שעכבת המעגל תהא מורכבת מהתנגדות ממשית בלבד, ללא j .
במעגל זה מצב זה יתקבל עבור :

$$\bar{Z}_C=-0.5j(\Omega)$$

ומכאן שהיגב הקבל הדרוש הוא :

$$X_C=0.5(\Omega)$$

נוסיף, שבמצב תהודה זה, החלק המדומה של העכבה השקולה מתאפס, ונשארת רק ההתנגדות הממשית של $R_x=0.5\Omega$ (זוהי ההתנגדות אותה חישבנו בתחילת סעיף א׳).

שאלה 7

א. למעגל המגנטי הנתון ישנם שלושה סוגים של מיאון: מיאון הפרסה, מיאון התיבה, ומיאון חריצי האוויר. נסמן מיאונים אלה בהתאמה ב- R_{m_1} , R_{m_2} , R_{m_3} . נרכז נתונים:

$$\begin{cases} \ell_1 = 200(\mathrm{mm}) = 200\times10^{-3}(\mathrm{m}) \\ A_1 = 1\left(\mathrm{cm}^2\right) = 1\times10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right) \\ \mu_{r_1} = 4000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell_2 = 10(\mathrm{cm}) = 10\times10^{-2}(\mathrm{m}) \\ A_2 = 1\left(\mathrm{cm}^2\right) = 1\times10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right) \\ \mu_{r_2} = 2400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell_3 = 1(\mathrm{mm}) = 1\times10^{-3}(\mathrm{m}) \\ A_3 = 1\left(\mathrm{cm}^2\right) = 1\times10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right) \\ \mu_{r_3} = 1 \end{cases}$$

הנתונים האחרונים שסומנו במספר 3 הם נתוני חריצי האוויר. רשמנו את האורך הכולל של שני חריצי האוויר יחד, על מנת לחשב בבת אחת את המיאון של שניהם. שטח החתך שלהם זהה לשטח החתך של הפרסה והתיבה. כמו כן לשם הסדר הטוב, ציינו שהחלחלות המגנטית היחסית של האוויר שווה ל-1, כידוע. נחשב את שלושת המיאונים:

$$R_{m_1} = \frac{\ell_1}{\mu_0 \mu_{r_1} A_1} = \frac{200\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot4000\cdot1\times10^{-4}} = 397.887\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_2} = \frac{\ell_2}{\mu_0 \mu_{r_2} A_2} = \frac{10\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot2400\cdot1\times10^{-4}} = 331.572\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_3} = \frac{\ell_3}{\mu_0 \mu_{r_3} A_3} = \frac{1\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot1\cdot1\times10^{-4}} = 7.957\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

נחשב את המיאון השקול. שלושת המיאונים שחישבנו מחוברים בטור. מכאן:

$$R_{m_\mathrm{T}} = R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} = 397.887\times10^3 + 331.572\times10^3 + 7.957\times10^6 = 8.687\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

ב. נתון שהתנגדות הסליל היא $R = 4\Omega$, והוא מחובר למקור מתח ישר של $E = 24\text{V}$. נחשב את הזרם דרך הסליל:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{24}{4} = 6(\text{A})$$

עוד נתון כי מספר כריכות הסליל הוא:

$$N = 300$$

נחשב תחילה את השטף במעגל המגנטי בעזרת הקשר:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_{m_\text{T}}} = \frac{NI}{R_{m_\text{T}}} = \frac{300 \cdot 6}{8.687 \times 10^6} = 0.207(\text{mWb})$$

נחשב את B:

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{0.207 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-4}} = 2.072(\text{T})$$

ג. נלך בדרך הפוכה לדרך של הסעיף הקודם:

$$\phi = B \cdot A = 3 \cdot 1 \times 10^{-4} = 0.3(\text{mWb})$$

$$\phi = \frac{NI}{R_{m_\text{T}}} \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{\phi \cdot R_{m_\text{T}}}{I} = \frac{0.3 \times 10^{-3} \cdot 8.687 \times 10^6}{6} = 434.36$$

מספר הליפופים צריך להיות מספר שלם, ולכן יש לעגל כלפי מעלה או כלפי מטה. קיבלנו ערך עשרוני קטן מ- 0.5 , ולכן נעגל כאן כלפי מטה. מכאן:

$$N \approx 434$$

ד. בין התיבה לפרסה פועל **כוח משיכה**. הסיבה לכך הינה, שבצד אחד השטף יוצא מהתיבה ונכנס לפרסה, ובצד השני להיפך. מקום היציאה של השטף ומקום הכניסה שלו יוצרים בהתאמה קטבים מגנטיים מנוגדים – צפון ודרום. כידוע בין קטבים מגנטיים מנוגדים קיים תמיד כוח משיכה.

שאלה 8

א. מכיוון שהמעגל הנתון מכיל מקורות AC בעלי תדירויות שונות יש לפתור בסופרפוזיציה.

תרומת $v_1(t)$:

נתון:

$$v_1(t)=10\sin(314t)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

$$\bar{V}_1=\frac{10}{\sqrt{2}}=7.071(\mathrm{V})$$

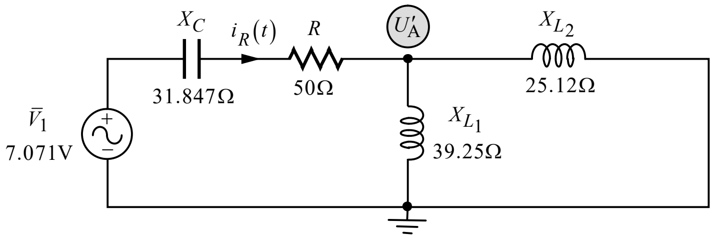
עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{314\cdot 100\times 10^{-6}}=31.847(\Omega)$$

$$X_{L_1}=\omega L_1=314\cdot 125\times 10^{-3}=39.25(\Omega)$$

$$X_{L_2}=\omega L_2=314\cdot 80\times 10^{-3}=25.12(\Omega)$$

נקצר את $v_2(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל:



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{U}'_A=\frac{\dfrac{\bar{V}_1}{R-jX_C}}{\dfrac{1}{R-jX_C}+\dfrac{1}{jX_{L_1}}+\dfrac{1}{jX_{L_2}}}=\frac{\dfrac{7.071}{50-j31.847}}{\dfrac{1}{50-j31.847}+\dfrac{1}{j39.25}+\dfrac{1}{j25.12}}=2.056\angle 108.293°(\mathrm{V})$$

הזרם המבוקש מוגדר בשאלה בכיוון ימין. החיסור המתאים לכיוון זרם זה הוא $\bar{V}_1-\bar{U}'_A$ (ולא להיפך). מכאן:

$$\bar{I}'_R=\frac{\bar{V}_1-\bar{U}'_A}{R-jX_C}=\frac{7.071-2.056\angle 108.293°}{50-j31.847}=0.134\angle 18.293°(\mathrm{A})$$

תרומת $v_2(t)$:

נתון:

$$v_2(t)=15\sin(628t+80°)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

$$\bar{V}_1=\frac{15\angle 80°}{\sqrt{2}}=10.606\angle 80°(\mathrm{V})$$

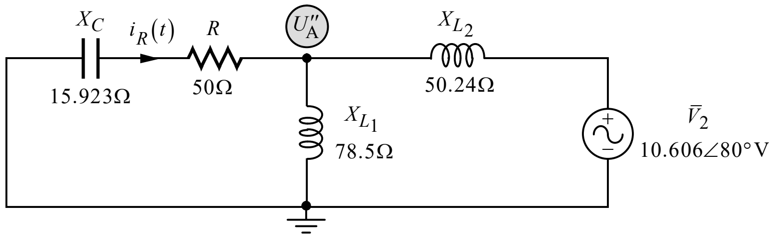
עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{628\cdot 100\times 10^{-6}}=15.923(\Omega)$$

$$X_{L_1}=\omega L_1=628\cdot 125\times 10^{-3}=78.5(\Omega)$$

$$X_{L_2}=\omega L_2=628\cdot 80\times 10^{-3}=50.24(\Omega)$$

נקצר את $v_1(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל:



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{U}''_A=\frac{\frac{\bar{V}_2}{jX_{L_2}}}{\frac{1}{R-jX_C}+\frac{1}{jX_{L_1}}+\frac{1}{jX_{L_2}}}=\frac{\frac{10.606\angle 80^\circ}{j50.24}}{\frac{1}{50-j15.923}+\frac{1}{j78.5}+\frac{1}{j50.24}}=6.511\angle 45.940^\circ(\mathrm{V})$$

הזרם המבוקש מוגדר בשאלה בכיוון ימין. החיסור המתאים לכיוון זרם זה הוא $0-\bar{U}''_A$ (ולא להיפך). מכאן:

$$\bar{I}''_R=\frac{0-\bar{U}''_A}{R-jX_C}=\frac{0-6.511\angle 45.940^\circ}{50-j15.923}=0.124\angle -116.394^\circ(\mathrm{A})$$

נסכם את התרומות. חישבנו את שני הזרמים על סמך ההנחה שכיוון שניהם ימינה, וכפי שציינו לעיל. הלכך יש לחבר בין שתי התרומות. כידוע, בחיבור בסופרפוזיציה יש להציג את התוצאות כתלות בזמן, וכפי הנדרש בשאלה. מכאן:

$$i_R(t)=i'_R(t)+i''_R(t)=0.134\sqrt{2}\sin(314t+18.293^\circ)+0.124\sqrt{2}\sin(628t-116.394^\circ)(\mathrm{A})$$

ב. שני מקורות המתח של המעגל הם מקורות סינוסיים. כידוע הממוצע של אות סינוס הוא אפס. לפיכך:

$$I_{R(\mathrm{av})}=0(\mathrm{A})$$

ג. את הערך היעיל השקול נחשב בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$I_{R(\mathrm{rms})}=\sqrt{I^2_{\mathrm{rms}_1}+I^2_{\mathrm{rms}_2}}=\sqrt{0.134^2+0.124^2}=0.182(\mathrm{A})$$

ד. את **ההספק הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת הערך **היעיל**:

$$P_R=I^2_{R(\mathrm{rms})}\cdot R=0.182^2\cdot 50=1.671(\mathrm{W})$$