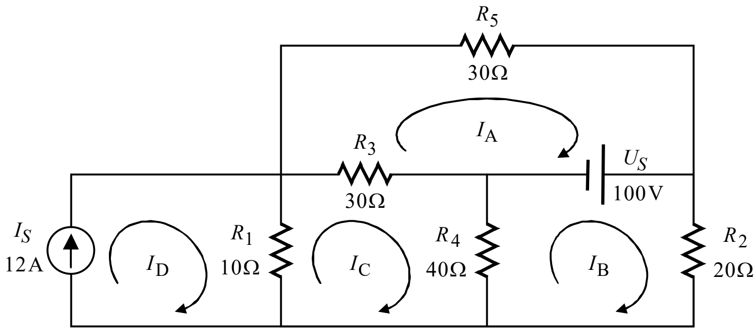
פתרון מלא לבחינת מה"ט בתורת החשמל – קיץ 2023 מועד א'

שאלה 1

א.



הקדמה: בשרטוט המקורי שבשאלה חוברה אדמה בחלק התחתון של המעגל. אם נרצה לפתור במתחי צמתים, נטצרך לעשות שימוש בשיטת "סופר צומת", זאת מכיוון שיש מקור מתח אידיאלי בין שני צמתים (הרחבה על שיטה זו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים"). פתרון אפשרי הוא להזיז את האדמה, ולחברה אל אחד משני הצמתים אליהם מחובר מקור המתח. ניתן כמובן גם לפתור בשיטה אחרת. אנו בחרנו לפתור בזרמי חוגים.

מכיוון שמקור הזרם נמצא על ענף חיצוני, נוכל לומר כי הזרם I_D שווה למקור הזרם I_S. בנוסף, מכיוון שמקור הזרם בכיוונו של I_D, הזרם I_D יקבל סימן חיובי. ובניסוח מתמטי:

$I_D = I_S = 12(\mathrm{A})$

במקרה מעין זה, די אם נרשום משוואות לשלושת החוגים הנותרים בלבד.

חוג A:

$$(R_3+R_5)I_A - (0)I_B - (R_3)I_C = -U_S$$

$$(30+30)I_A - (0)I_B - (30)I_C = -100$$

חוג B:

$$(0)I_A + (R_2+R_4)I_B - (R_4)I_C = U_S$$

$$(0)I_A + (20+40)I_B - (40)I_C = 100$$

חוג C:

$$-(R_3)I_A - (R_4)I_B + (R_1+R_3+R_4)I_C - R_1 I_D = 0$$

$$-(30)I_A - (40)I_B + (10+30+40)I_C - 10\cdot 12 = 0$$

$$-(30)I_A - (40)I_B + (10+30+40)I_C = +10\cdot 12$$

יש לשים לב שבמשוואה האחרונה הצבנו את הערך של I_D, והעברנו מכפלה זו של I_D אל האגף הימני שבו המספרים החופשיים.

פתרון המשוואות נותן:

$I_{\text{A}} = 0.115(\text{A})$

$I_{\text{B}} = 4.043(\text{A})$

$I_{\text{C}} = 3.565(\text{A})$

$I_{\text{D}} = 12(\text{A})$ $\leftarrow$ נתון בשאלה

נחשב כעת את הזרמים המבוקשים בשאלה:

$I_{R_1} = I_{\text{D}} - I_{\text{C}} = 12 - 3.565 = 8.434(\text{A})$

$I_{R_2} = I_{\text{B}} = 4.043(\text{A})$

$I_{R_4} = I_{\text{B}} - I_{\text{C}} = 4.043 - 3.565 = 0.478(\text{A})$

ב.

$I_{U_S} = I_{\text{B}} - I_{\text{A}} = 4.043 - 0.115 = 3.927(\text{A})$

$P_{U_S} = I_{U_S} \cdot U_S = 3.927 \cdot 100 = 392.753\ (\text{W})$

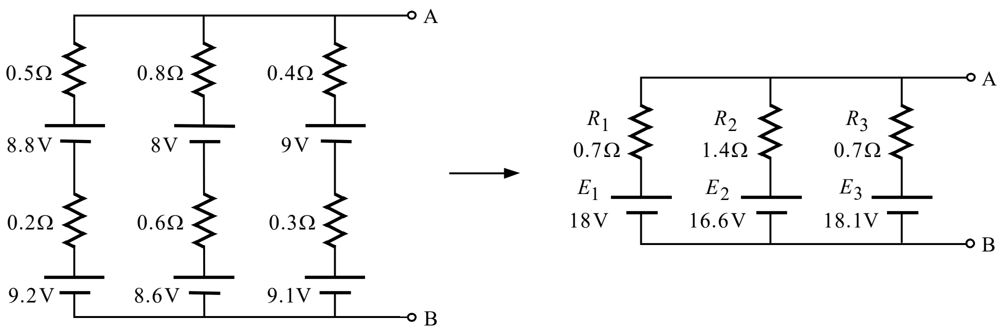
ג.

$U_{I_S} = U_{R_1} = I_{R_1} \cdot R_1 = 8.434 \cdot 10 = 84.347\ (\text{V})$

$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 84.347\ \cdot 12 = 1012.173\ (\text{W})$

שאלה 2

א.

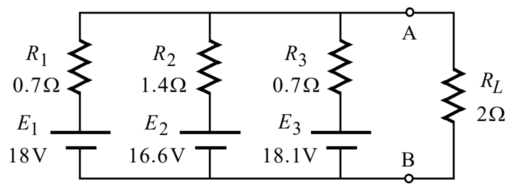


המעגל שבצד שמאל הוא המעגל הנתון בשאלה (כאשר המפסק פתוח). חיברנו בין המקורות ובין הנגדים שבכל ענף, וקיבלנו את המעגל השקול המופיע בצד ימין של האיור. על מנת שמהלך הפתרון יהיה מובן די הצורך, הענקנו סימונים למקורות ולנגדים השקולים שבכל ענף.

בסעיף זה ביקשו לחשב את המתח על הדקי ה"סוללה" כאשר המפסק פתוח. כוונת השאלה שכל הששה תאים נקראים יחד "סוללה". המתח המבוקש הוא אם כן המתח בין A ל-B. נחשב בעזרת משפט מילמן:

$$U_{AB}=\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}=\frac{\frac{18}{0.7}+\frac{16.6}{1.4}+\frac{18.1}{0.7}}{\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}}=17.76(\text{V})$$

ב. נשרטט מעגל שקול:

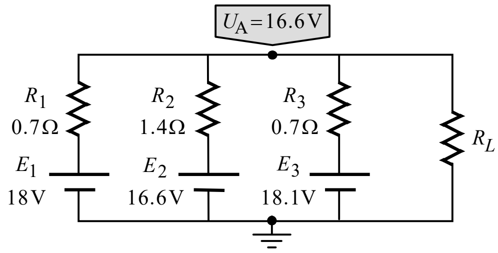


המתח בין A ל-B כעת אינו המתח שחושב בסעיף הקודם, שהרי יש כעת נגד נוסף במעגל. ניעזר שוב במשפט מילמן ונחשב את המתח והזרם של R_L:

$$U_{R_L}=U_{AB}=\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_L}}=\frac{\frac{18}{0.7}+\frac{16.6}{1.4}+\frac{18.1}{0.7}}{\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}+\frac{1}{2}}=15.578(\text{V})$$

$$I_{R_L}=\frac{U_{R_L}}{R_L}=\frac{15.578}{2}=7.789(\text{A})$$

ג. נשרטט מעגל שקול ולאחר מכן נבאר:



ביאור: בשאלה ביקשו שכל המקורות יפעלו כספקים. על מנת שמצב זה יתרחש, המתח U_A צריך להיות קטן מהמקור הכי קטן – E_2. כלומר, המתח U_A צריך להיות **קטן** מ- $16.6V$. במצב זה, מכיון ש- U_A קטן מכל המקורות, הזרמים בכל המקורות יזרמו כלפי מעלה (שכן זרם חשמלי זורם מהפוטנציאל הגבוה לנמוך). נמצא שכל המקורות במצב זה יפעלו כספקים כנדרש בשאלה, שהרי הזרם יוצא מההדק החיובי של כל מקור.

לצורך הפתרון קבענו ש- U_A שווה ל- $16.6V$ בדיוק, ואת הנגד R_L השארנו כנעלם. נפתור שוב בעזרת משפט מילמן (נציין כי המתח U_A הוא למעשה המתח U_{AB} אותו חישבנו בסעיפים הקודמים, אלא שכעת לשם ההסבר הצגנו מתח זה כ- U_A ולמטה חיברנו אדמה. לפיכך הפעלת משפט מילמן תהא זהה בדיוק לסעיף הקודם, אלא שכעת R_L הוא הנעלם):

$$U_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_L}}$$

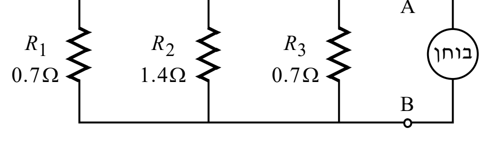
$$16.6 = \frac{\frac{18}{0.7}+\frac{16.6}{1.4}+\frac{18.1}{0.7}}{\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}+\frac{1}{R_L}}$$

$$R_L = 4.006(\Omega)$$

הערך שקיבלנו עבור R_L, מתבסס על ההנחה שהנחנו כי המתח U_A הוא **בדיוק** $16.6V$. אולם אנו הרי רוצים שהמתח U_A יהא **קטן** מ- $16.6V$ (וכך אפילו E_2 יהיה ספק). לשם כך R_L צריך להיות **קטן** מהערך שקיבלנו. ובניסוח מתמטי:

$$R_L < 4.006(\Omega)$$

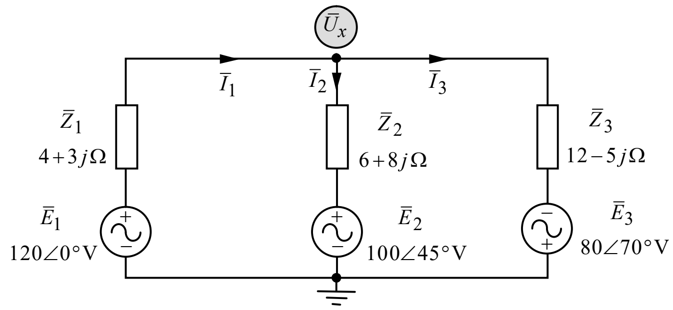
ד. על מנת לקבל העברת "אנרגיה" מרבית, או העברת "הספק" מרבית, הנגד R_L צריך להיות שווה להתנגדות תבנין הנראית מבין הדקיו. לשם חישוב התנגדות תבנין, נקצר את מקורות המתח, ונניח מקור בוחן במקום R_L. מכאן:



$$R_L = R_{Th} = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}\right)^{-1} = 0.28(\Omega)$$

שאלה 3

א.



נפתור בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_x=\frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}-\frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}}=\frac{\frac{120\angle 0°}{4+3j}+\frac{100\angle 45°}{6+8j}-\frac{80\angle 70°}{12-5j}}{\frac{1}{4+3j}+\frac{1}{6+8j}+\frac{1}{12-5j}}=108.772\angle -6.424°(\mathrm{V})$$

$$\bar{I}_1=\frac{\bar{E}_1-\bar{U}_x}{\bar{Z}_1}=\frac{120\angle 0°-108.772\angle -6.424°}{4+3j}=3.405\angle 8.748°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_2=\frac{\bar{U}_x-\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}=\frac{108.772\angle -6.424°-100\angle 45°}{6+8j}=9.091\angle -118.85°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_3=\frac{\bar{U}_x-\left(-\bar{E}_3\right)}{\bar{Z}_3}=\frac{108.772\angle -6.424°+80\angle 70°}{12-5j}=11.491\angle 47.565°(\mathrm{A})$$

הערה: כיווני הזרמים נקבעו על ידי כותב השאלה. בהתאם לכך חישבנו את הזרמים המבוקשים (לדוגמה, מכיוון שכיוונו של $\bar{I}_1$ הוא ימינה, חיסרנו בחישוב זרם זה $\bar{E}_1-\bar{U}_x$ ולא להיפך. יש לדבר השפעה על ערך הזווית).

ב.

$$\bar{S}_{E_1}=E_1\cdot\bar{I}_1^{\,*}=(120\angle 0°)(3.405\angle -8.748°)=408.68\angle -8.748°(\mathrm{VA})$$

$$\bar{S}_{E_2}=E_2\cdot\bar{I}_2^{\,*}=(100\angle 45°)(9.091\angle +118.85°)=909.19\angle 163.85°(\mathrm{VA})$$

$$\bar{S}_{E_3}=E_3\cdot\bar{I}_3^{\,*}=(80\angle 70°)(11.491\angle -47.565°)=919.309\angle 22.434°(\mathrm{VA})$$

ג. את ההספק הממשי של $\bar{E}_1$ נוכל להוציא מתוך ההספק המרוכב שחושב בסעיף הקודם:

$$\bar{S}_{E_1}=408.68\angle -8.748°=403.927-62.16j\ (\mathrm{VA})$$

נמצא שההספק הממשי של $\bar{E}_1$ הוא $403.927\ \mathrm{W}$. בשאלה התבקשנו להציג את האנרגיה בשתי יחידות מדידה. יחידת המדידה J (ג'אול) מתקבלת על ידי הצבת ההספק בוואט, והזמן בשניות (אלה היחידות ה"רשמיות"). מכאן:

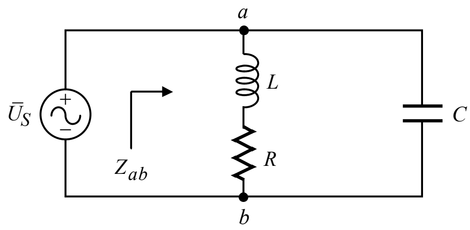
$$W_{E_1}=P\cdot t=403.927\cdot(4\times 60)=96942.62(\mathrm{J})$$

יחידת המדידה kWh (קוט"ש) מתקבלת על ידי הצבת ההספק בקילוואט, והזמן בשעות. מכאן:

$$W_{E_1}=P\cdot t=0.4039\cdot\left(\frac{4}{60}\right)=0.026(\mathrm{kWh})$$

שאלה 4

א.



נרשום תחילה ביטוי לעכבה $\bar{Z}_{ab}$. זוהי העכבה הנראית מכיוונו של החץ שבאיור (כלומר היא כוללת גם את הקבל, ולא רק את הענף הבודד ab). מכאן:

$$\bar{Z}_{ab}=\left(\frac{1}{R+jX_L}+\frac{1}{-jX_C}\right)^{-1}=\frac{1}{\dfrac{1}{R+jX_L}+\dfrac{1}{-jX_C}}$$

נרשום כעת ביטוי למתירות $\bar{Y}_{ab}$ (הרחבה על המושג "מתירות" ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי זרם חילופין):

$$\bar{Y}_{ab}=\frac{1}{\bar{Z}_{ab}}=\frac{1}{R+jX_L}+\frac{1}{-jX_C}=\frac{1}{R+jX_L}-\frac{1}{jX_C}$$

כידוע, היגבי הסליל והקבל נתונים על ידי:

$$X_L=\omega L$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}$$

נציב ביטויים אלה בביטוי המתירות:

$$\bar{Y}_{ab}=\frac{1}{R+jX_L}-\frac{1}{jX_C}=\frac{1}{R+j\omega L}-\frac{1}{j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{1}{R+j\omega L}-\frac{\omega C}{j}$$

עלינו להפריד בין הממשי למדומה (כפי המקובל בפישוט ביטוי מרוכב). לשם כך נכפיל את השבר הראשון בצמוד של המכנה, ואת השבר השני די שנכפיל ב- j, באופן הבא:

$$\bar{Y}_{ab}=\left(\frac{1}{R+j\omega L}\cdot\frac{R-j\omega L}{R-j\omega L}\right)-\left(\frac{\omega C}{j}\cdot\frac{j}{j}\right)$$

ההכפלה שביצענו מותרת, שהרי הכפלנו למעשה כל שבר ב-1. הנחנו כל שבר והמכפלה שלו בסוגריים על מנת שהמהלך יהיה יותר ברור. נזכיר כי $j^2=-1$. מכאן:

$$\bar{Y}_{ab}=\left(\frac{1}{R+j\omega L}\cdot\frac{R-j\omega L}{R-j\omega L}\right)-\left(\frac{\omega C}{j}\cdot\frac{j}{j}\right)=\left(\frac{R-j\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)-\left(\frac{j\omega C}{-1}\right)=\frac{R-j\omega L}{R^2+\omega^2L^2}+j\omega C$$

כעת, כאשר אין j במכנה, נוכל להפריד בין הממשי למדומה, באופן הבא:

$$\bar{Y}_{ab}=\frac{R-j\omega L}{R^2+\omega^2L^2}+j\omega C=\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}-\frac{j\omega L}{R^2+\omega^2L^2}+j\omega C=\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}+j\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)$$

ב. נתון: $R=2\Omega$, $L=0.01\text{H}$, $C=50\mu\text{F}$. המעגל שבשאלה הוא מעגל מקבילי מעשי עם קבל אידיאלי. תדר התהודה של מעגל מסוג זה נתון על ידי:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R_L^{\,2}}{L^2}}=\sqrt{\frac{1}{0.01\cdot 50\times 10^{-6}}-\frac{2^2}{0.01^2}}=1400\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

ג. ניתן לחשב את העכבה השקולה בעזרת הביטוי שפיתחנו בסעיף א'. אנו נעדיף לחשב בדרך "הרגילה", כלומר נחשב את ההיגבים בתהודה ומשם את העכבה השקולה:

$$X_L=\omega L=1400\cdot 0.01=14(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1400\cdot 50\times 10^{-6}}=14.285(\Omega)$$

נעיר כי ניתן לשים לב שההיגבים אינם שווים. היגבים שווים מתקבלים תמיד בתהודה טורית, או בתהודה מקבילית אידיאלית. נחשב את העכבה השקולה:

$$\bar{Z}_{ab}=\left(\frac{1}{R+jX_L}+\frac{1}{-jX_C}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2+j14}+\frac{1}{-j14.285}\right)^{-1}=100(\Omega)$$

קיבלנו מספר ממשי טהור. תוצאה זו הייתה צפוייה שהרי בכל סוגי התהודה העכבה השקולה היא תמיד מספר ממשי טהור (נציין כי תוצאה מדויקת מתקבלת רק כאשר עושים שימוש בזכרונות המחשבון, כך שעובדים תמיד עם כל הספרות אחרי הנקודה).

ד. תדירות אפס משמעותה שהמקור מתנהג כמו מקור DC. כלומר הסליל שקול לקֶצר, והקבל שקול לנֶתק (ניתן להיווכח בקביעה זו גם מהתבוננות בנוסחאות ההיגבים שהובאו בסעיף הקודם – אם נציב $\omega=0$, אזי היגב הסליל יהיה אפס, כלומר קצר. היגב הקבל ישאף לאינסוף, כלומר נתק). מכאן:

$$\bar{Z}_{ab}=R=2(\Omega)$$

ניתן להוכיח זאת בדרך נוספת. נציב $\omega=0$ בביטוי המתירות שפיתחנו בסעיף א' ונקבל:

$$\bar{Y}_{ab}=\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}+j\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)=\frac{R}{R^2+\cancel{0^2L^2}}+\cancel{j\left(0\cdot C-\frac{0\cdot L}{R^2+0^2L^2}\right)}=\frac{1}{R}$$

$$\bar{Z}_{ab}=\frac{1}{\bar{Y}_{ab}}=R=2(\Omega)$$

שאלה 5

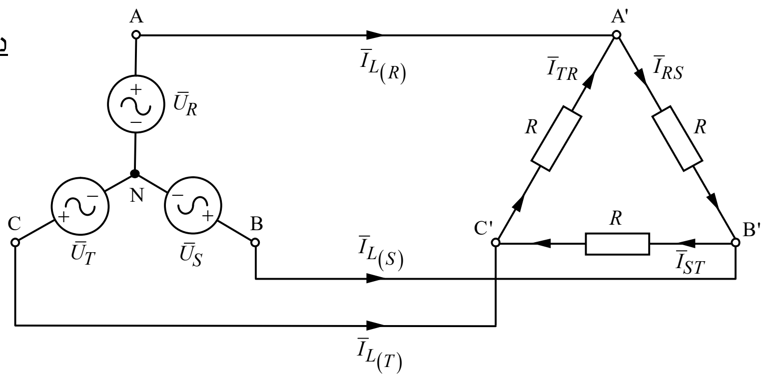
א.

נתון:

$\bar{U}_R = 230\angle 0°\text{V}$

$\bar{U}_S = 230\angle -120°\text{V}$

$\bar{U}_T = 230\angle -240°\text{V}$



הקדמה: בשאלה זו ישנם נתונים שמעט סותרים לכאורה. נתון כי המתח השלוב (נקרא גם מתח הקו) הוא 400V. המתח השלוב הוא המתח בין כל שני הדקים של המחולל, למשל $\bar{U}_{\text{AB}}$. במקרה שלנו ניתן לחשבו בעזרת מסלול מתחים העובר דרך מתחי המקורות הנתונים:

$$\bar{U}_{\text{AB}} = \bar{U}_R - \bar{U}_S = 230\angle 0° - 230\angle -120° = 398.37\angle 30°(\text{V})$$

קיבלנו 398.37V ולא 400V (הבדל קטן אמנם, אבל יש לו השפעה מסוימת על התוצאות). נציין כי אנו מעוניינים לחשב את המתחים השלובים כדרך שחישבנו כעת, שכן בדרך זו מקבלים גם את הזוויות של המתחים השלובים, נתון שנצרך לשאלה. נראה שכוונת כותב השאלה היא פשוט לעגל את התוצאות שנקבל ל-400V, וכפי המקובל לעיתים בשאלות מסוג זה. בדרך זו נלך בפתרון שאלה זו.

נחשב תחילה את ערך הנגד R. נתון כי ההספק של "הצרכן" הוא 6kW. במילה "צרכן" הכוונה לשלושת הנגדים. ההספק של נגד בודד הוא אם כן שליש מזה – 2kW. המתח על כל נגד הוא אחד מהמתחים השלובים, שגודלם כאמור 400V. מכאן:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{400^2}{2\text{k}} = 80(\Omega)$$

נחשב את המתחים השלובים, שהם במקרה זה המתחים של שלושת הנגדים:

$$\bar{U}_{\text{AB}} = \bar{U}_R - \bar{U}_S = 230\angle 0° - 230\angle -120° = 398.37\angle 30°(\text{V}) \approx 400\angle 30°(\text{V})$$

$$\bar{U}_{\text{BC}} = \bar{U}_S - \bar{U}_T = 230\angle -120° - 230\angle -240° = 398.37\angle -90° \approx 400\angle -90°(\text{V})$$

$$\bar{U}_{\text{CA}} = \bar{U}_T - \bar{U}_R = 230\angle -240° - 230\angle 0° = 398.37\angle 150° \approx 400\angle 150°(\text{V})$$

כל אחד מהנגדים מחובר כאמור אל אחד מהמתחים השלובים אותם חישבנו. נחשב את הזרמים העוברים דרך הנגדים בעזרת חוק אום:

$$\bar{I}_{RS} = \frac{\bar{U}_{\text{AB}}}{R} = \frac{400\angle 30°}{80} = 5\angle 30°(\text{A})$$

$$\bar{I}_{ST} = \frac{\bar{U}_{\text{BC}}}{R} = \frac{400\angle -90°}{80} = 5\angle -90°(\text{A})$$

$$\bar{I}_{TR} = \frac{\bar{U}_{\text{CA}}}{R} = \frac{400\angle 150°}{80} = 5\angle 150°(\text{A})$$

נחשב את זרמי המקורות. ניתן לראות באיור שזרמים אלה הם למעשה זרמי הקווים (שהם התילים המחברים בין המקורות להתנגדויות). נוכל לחשב זרמים אלה בעזרת חוק הזרמים. מהפעלת חוק הזרמים על הצמתים A', B', C' נובע:

$$\bar{I}_{L(R)}+\bar{I}_{TR}=\bar{I}_{RS} \quad\Rightarrow\quad \bar{I}_{L(R)}=\bar{I}_{RS}-\bar{I}_{TR}=5\angle 30^\circ-5\angle 150^\circ=8.66\angle 0^\circ(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{L(S)}+\bar{I}_{RS}=\bar{I}_{ST} \quad\Rightarrow\quad \bar{I}_{L(S)}=\bar{I}_{ST}-\bar{I}_{RS}=5\angle -90^\circ-5\angle 30^\circ=8.66\angle -120^\circ(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{L(T)}+\bar{I}_{ST}=\bar{I}_{TR} \quad\Rightarrow\quad \bar{I}_{L(T)}=\bar{I}_{TR}-\bar{I}_{ST}=5\angle 150^\circ-5\angle -90^\circ=8.66\angle 120^\circ(\mathrm{A})$$

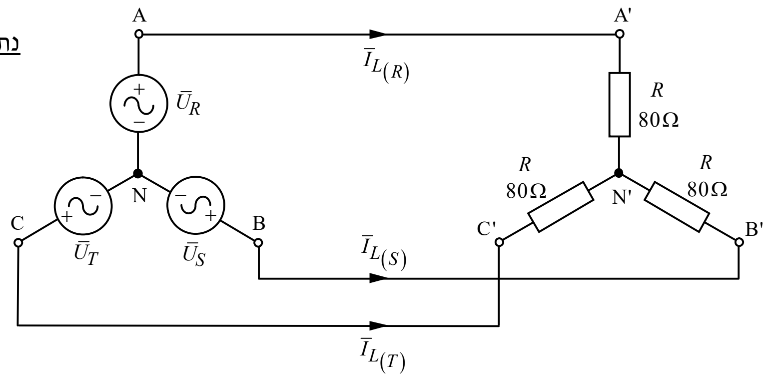
ב.

<u>נתון</u>:

$\bar{U}_R=230\angle 0^\circ\mathrm{V}$

$\bar{U}_S=230\angle -120^\circ\mathrm{V}$

$\bar{U}_T=230\angle -240^\circ\mathrm{V}$



הקדמה: כידוע במעגל מסוג זה שבו גם המקורות וגם העומס בחיבור כוכב, המתח של כל נגד שווה למתח של המקור המתאים אליו. לדוגמה, המתח של הנגד המתוח בין הנקודות $A'N'$ שווה למתח המקור המתוח בין הנקודות AN, וכן על זו הדרך. את זרמי הנגדים נוכל למצוא בקלות בעזרת חוק אום. זרמי הנגדים במקרה זה, הם גם זרמי הקווים וגם זרמי המקורות, וכפי שניתן לראות באיור.

נחשב את זרמי הנגדים (שהם כאמור גם זרמי המקורות):

$$\bar{I}_{L(R)}=\frac{\bar{U}_R}{R}=\frac{230\angle 0^\circ}{80}=2.875\angle 0^\circ(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{L(S)}=\frac{\bar{U}_S}{R}=\frac{230\angle -120^\circ}{80}=2.875\angle -120^\circ(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{L(T)}=\frac{\bar{U}_T}{R}=\frac{230\angle -240^\circ}{80}=2.875\angle 120^\circ(\mathrm{A})$$

נחשב כעת את ההספק של נגד אחד:

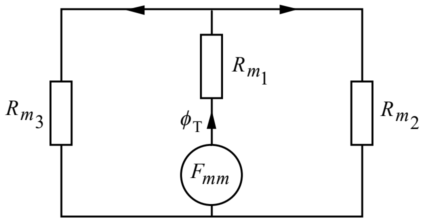
$$P_R=I^2\cdot R=2.875^2\cdot 80=661.25(\mathrm{W})$$

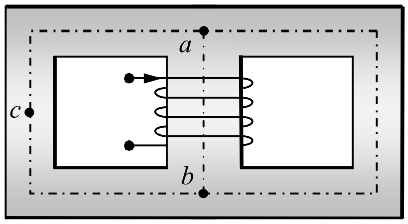
יש בעומס שלושה נגדים. ההספק הכולל הוא אם כן:

$$P_{\mathrm{T}}=3\cdot P_R=3\cdot 661.25=1983.75(\mathrm{W})$$

שאלה 6

א.





נתון שכיוון השטף בעמוד האמצעי הוא כלפי מעלה. בהתאם לכך סומנו כיווני השטפים ב״מעגל החשמלי״ שבצד שמאל, האנלוגי למעגל המגנטי שבצד ימין. נרכז נתונים:

$$\begin{cases} \ell_{acb} = 400(\text{mm}) = 400\times10^{-3}(\text{m}) \\ A_{acb} = 200(\text{mm}^2) = 200\times10^{-6}(\text{m}^2) \\ \mu_{r(acb)} = 2000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell_{ab} = 8(\text{cm}) = 8\times10^{-2}(\text{m}) \\ A_{ab} = 5(\text{cm}^2) = 5\times10^{-4}(\text{m}^2) \\ \mu_{r(ab)} = 1000 \end{cases}$$

$$I = 0.6(\text{A})$$

$$\phi_T = 0.2(\text{mWb})$$

נתון ששני העמודים הצדדיים זהים. נחשב את המיאון של כל אחד מהם:

$$R_{m_2} = R_{m_3} = \frac{\ell_{acb}}{\mu_0 \cdot \mu_{r(acb)} \cdot A_{acb}} = \frac{400\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot2000\cdot200\times10^{-6}} = 795.774\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

נחשב את המיאון של העמוד האמצעי. יש לשים לב ש- μ_r שונה כעת. מכאן:

$$R_{m_1} = \frac{\ell_{ab}}{\mu_0 \cdot \mu_{r(ab)} \cdot A_{ab}} = \frac{8\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot1000\cdot5\times10^{-4}} = 127.323\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

נחשב את המיאון השקול:

$$R_{m_T} = R_{m_2} \,||\, R_{m_3} + R_{m_1} = \frac{795.774\times10^3}{2} + 127.323\times10^3 = 525.211\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

ב. גודל הזרם בסליל נתון בשאלה, וכן נתון גודל השטף דרך העמוד האמצעי. מכאן:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_m} = \frac{NI}{R_m} \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{\phi_T \cdot R_{m_T}}{I} = \frac{0.2\times10^{-3}\cdot525.211\times10^3}{0.6} = 175.070 \approx 175$$

ג. נחשב תחילה את השראות הסליל, ולאחר מכן את האנרגיה:

$$L=\frac{N^2}{R_{m_{\mathrm{T}}}}=\frac{175^2}{525.211\times10^3}=0.058(\mathrm{H})=58.309(\mathrm{mH})$$

$$W_L=\frac{L\cdot I^2}{2}=\frac{58.309\times10^{-3}\cdot0.6^2}{2}=0.010(\mathrm{J})=10.495(\mathrm{mJ})$$

ד. השטף בעמוד האמצעי נתון בשאלה:

$$\phi_{\mathrm{T}}=0.2(\mathrm{mWb})$$

שטף זה מתחלק בשווה בין שני העמודים הצדדיים (שהרי המיאון שלהם זהה). מכאן:

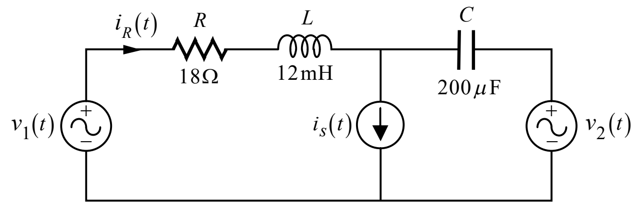
$$\phi_2=\phi_3=\frac{\phi_{\mathrm{T}}}{2}=\frac{0.2}{2}=0.1(\mathrm{mWb})$$

נחשב את השדה המגנטי B בעמוד האמצעי ובאחד העמודים הצדדיים:

$$B_{ab}=\frac{\phi_{\mathrm{T}}}{A_{ab}}=\frac{0.2\times10^{-3}}{5\times10^{-4}}=0.4(\mathrm{T})$$

$$B_{acb}=\frac{\phi_2}{A_{acb}}=\frac{0.1\times10^{-3}}{200\times10^{-6}}=0.5(\mathrm{T})$$

שאלה 7



נתון:

$$v_1(t)=15\sin(1000t)(\mathrm{V})$$

$$v_2(t)=10\sin(1500t+60°)(\mathrm{V})$$

$$i_s(t)=0.555(\mathrm{A})$$

א. מכיוון שהמעגל הנתון מכיל מקורות מסוגים שונים, יש לפתור בסופרפוזיציה.

תרומת $v_1(t)$:

נתון:

$$v_1(t)=15\sin(1000t)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

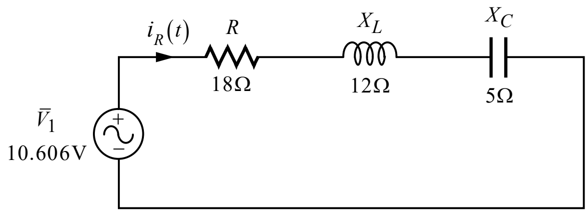
$$\bar{V}_1=\frac{15}{\sqrt{2}}=10.606(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L=\omega L=1000\cdot 12\times 10^{-3}=12(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot 200\times 10^{-6}}=5(\Omega)$$

ננתק את מקור הזרם, נקצר את $v_2(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל:



נחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{I}'_R=\frac{\bar{V}_1}{R+jX_L-jX_C}=\frac{10.606}{18+j12-j5}=0.549\angle-21.250°(\mathrm{A})$$

תרומת $v_2(t)$:

נתון:

$$v_2(t)=10\sin(1500t+60°)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

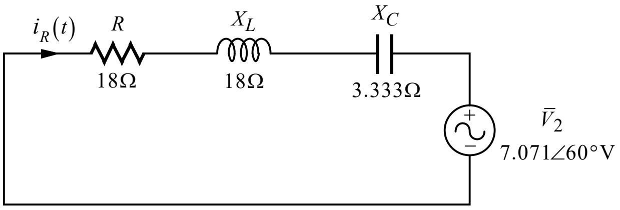
$$\bar{V}_2=\frac{10\angle 60°}{\sqrt{2}}=7.071\angle 60°(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L = \omega L = 1500 \cdot 12 \times 10^{-3} = 18(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1500 \cdot 200 \times 10^{-6}} = 3.333(\Omega)$$

ננתק את מקור הזרם, נקצר את $v_1(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל:

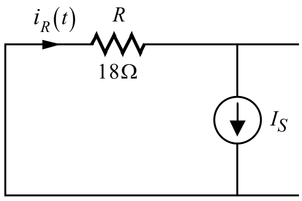


נחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{I}_R'' = \frac{\bar{V}_2}{R + jX_L - jX_C} = \frac{7.071\angle 60°}{18 + j18 - j3.333} = 0.304\angle 20.826°(\text{A})$$

תרומת $i_s(t)$:

מקור זה הוצג אמנם כתלות בזמן כמו מקורות AC, אולם מאופן הצגתו ללא תדירות (או תדירות אפס) ניתן לקבוע כי מקור זה הוא מקור DC. עבור מקור DC הסליל שקול לקֶצר והקבל שקול לנֶתק (במצב המתמיד). נשרטט מעגל שקול:



$$I_R''' = I_S = 0.555(\text{A})$$

נסכם את התרומות: שני הזרמים שתורמים $v_1(t)$ ו-$i_s(t)$ פועלים בכיוון ימין, ככיוון הנתון של הזרם המבוקש ולכן הם יופיעו בסימן חיובי. הזרם שתורם $v_2(t)$ פועל בכיוון ההפוך ולכן הוא יופיע בסימן שלילי. את הזרם הכולל נציג כתלות בזמן כנדרש בפתרון בספרפוזיציה, וכנדרש בשאלה עצמה. מכאן:

$$i_R(t) = i'(t) - i''(t) + i'''(t) =$$

$$= 0.549\sqrt{2}\sin(1000t - 21.250°) - 0.304\sqrt{2}\sin(1500t + 20.826°) + 0.555(\text{A})$$

<u>הערה</u>: במקום הסימן השלילי לפני הזרם האמצעי, יכולנו לרשום סימן "פלוס", ואת הזווית להפוך ב-$180°$ (שכן הכפלת מספר פולארי ב-1– גורמת להיפוך הזווית).

ב. הערך הממוצע שווה תמיד לערך ה-DC. מכאן:

$$I_{R(\text{av})} = I_R''' = 0.555(\text{A})$$

ג. את הערך היעיל השקול נחשב בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

$$I_{R\,(\text{rms})} = \sqrt{I_{\text{rms}_1}^2 + I_{\text{rms}_2}^2 + I_{\text{rms}_3}^2} = \sqrt{0.549^2 + 0.304^2 + 0.555^2} = 0.838(\text{A})$$

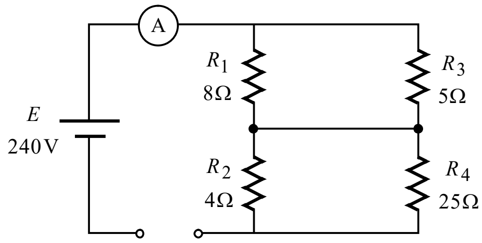
__הערה:__ בנוסחה זו יש להציב תמיד את הערכים בסימן חיובי, וכפי שהערנו על כך כמה פעמים (הרחבה על נידון זה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק באותות מחזוריים).

ד. את **ההספק הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת הערך **היעיל**. מכאן:

$$P_R = I_{R\,(\text{rms})}^2 \cdot R = 0.838^2 \cdot 18 = 12.642(\text{W})$$

שאלה 8

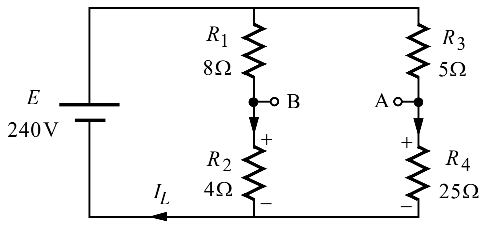
א. מיד לאחר סגירת המפסק הסליל שקול לנֶתק והקבל שקול לקֶצר. נשרטט מעגל שקול:



במצב המתקבל אין מעגל סגור ולכן הוריית מד הזרם היא אפס:

$$I_{(\mathrm{A})} = 0$$

ב. בתום כל תופעת המעבר (במצב המתמיד) הסליל שקול לקֶצר והקבל שקול לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



נחשב את הזרם של הסליל:

$$I_{R_{1-2}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{240}{8+4} = 20(\mathrm{A})$$

$$I_{R_{3-4}} = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{240}{5+25} = 8(\mathrm{A})$$

$$I_L = I_{\mathrm{T}} = I_{R_{1-2}} + I_{R_{3-4}} = 20 + 8 = 28(\mathrm{A})$$

נחשב את המתח בין A ל-B שהוא המתח של הקבל:

$$U_{R_2} = I_{R_{1-2}} \cdot R_2 = 20 \cdot 4 = 80(\mathrm{V})$$

$$U_{R_4} = I_{R_{3-4}} \cdot R_4 = 8 \cdot 25 = 200(\mathrm{V})$$

$$U_C = U_{\mathrm{AB}} = +U_{R_4} - U_{R_2} = 200 - 80 = 120(\mathrm{V})$$

בשאלה מובאים הנתונים הטכניים של הקבל:

$$A = 0.8\left(\mathrm{cm}^2\right) = 0.8 \times 10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right)$$

$$d = 0.2(\mathrm{mm}) = 0.2 \times 10^{-3}(\mathrm{m})$$

$$\varepsilon_r = 16.94$$

נחשב את קיבול הקבל בעזרת הנוסחה הבאה:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \cdot 16.94 \cdot 0.8 \times 10^{-4}}{0.2 \times 10^{-3}} = 59.967 \times 10^{-12} \approx 60\ (\mathrm{pF})$$

חישבנו את הזרם של הסליל ואת המתח של הקבל. נחשב את האנרגיה האגורה בסליל ובקבל, ואת האנרגיה הכללית האגורה במעגל:

$$W_L = \frac{L \cdot I_L^2}{2} = \frac{0.4\times10^{-9}\cdot 28^2}{2} = 156.8(\mathrm{nJ})$$

$$W_C = \frac{C \cdot U_C^2}{2} = \frac{60\times10^{-12}\cdot 120^2}{2} = 432(\mathrm{nJ})$$

$$W_{\mathrm{T}} = W_L + W_C = 156.8\mathrm{n} + 432\mathrm{n} = 588.8(\mathrm{nJ})$$

ג. כעת נתון $d = 0.1(\mathrm{mm}) = 0.1\times10^{-3}(\mathrm{m})$. נחשב את הקיבול החדש של הקבל:

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\cdot 16.94\cdot 0.8\times10^{-4}}{0.1\times10^{-3}} = 119.93\times10^{-12} \approx 120\,(\mathrm{pF})$$

המתח על הקבל לא השתנה בעקבות השינוי בקיבול שלו, שהרי הוא עדיין המתח בין A ל-B. נחשב את המטען האגור בקבל כעת:

$$Q_C = U_C \cdot C' = 120\cdot 120\times10^{-12} = 14.4(\mathrm{nC})$$

ד. אין כוונת השאלה שהקבל מתפרק עד לאפס, שהרי לשם כך צריך רק מסלול פריקה, ואין זה משנה מה ערכו של R_2 . כוונת השאלה היא מה צריך להיות ערכו של R_2 על מנת שהקבל לא ייטען מלכתחילה. מקרה זה ייתכן במצב של גשר ויטסטון מאוזן. מכאן:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \quad \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_3} = \frac{8\cdot 25}{5} = 40(\Omega)$$