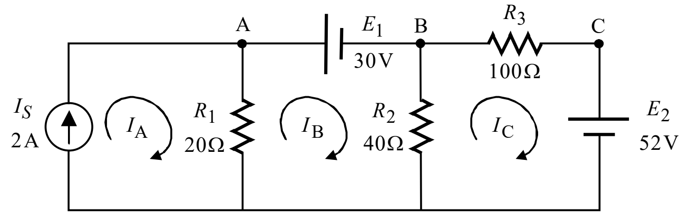
# פתרון מלא לבחינת מה"ט בתורת החשמל – קיץ 2023 מועד ב'

## <u>שאלה 1</u>

א.




**הקדמה:** אם נרצה לפתור שאלה זו במתחי צמתים, עדיף יהיה למקם את האדמה בצומת A או B, כי אחרת נישאר עם מקור מתח אידיאלי בין שני צמתים, מצב הדורש פתרון בשיטת "סופר צומת" (הרחבה על שיטה זו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים"). לחילופין ניתן להמיר את מקור הזרם במקור מתח. בשל סיבות אלו ואחרות, אנו נעדיף לפתור שאלה זו בזרמי חוגים.

מכיוון שמקור הזרם נמצא על ענף חיצוני, נוכל לומר כי הזרם $I_A$ שווה למקור הזרם $I_S$.
בנוסף, מכיוון שמקור הזרם בכיוונו של $I_A$, הזרם $I_A$ יקבל סימן חיובי. ובניסוח מתמטי:

$$I_A = I_S = 2(A)$$

במקרה מעין זה, די אם נרשום משוואות לחוגים B ו-C בלבד.

**חוג B:**

$$-(R_1)I_A + (R_1+R_2)I_B - (R_2)I_C = -E_1$$

$$-(20)\cdot 2 + (20+40)I_B - (40)I_C = -30$$

$$+(20+40)I_B - (40)I_C = -30 + (20)\cdot 2$$

יש לשים לב שבמשוואה האחרונה הצבנו את הערך של $I_A$, והעברנו מכפלה זו של $I_A$ אל האגף הימני שבו המספרים החופשיים.

**חוג C:**

$$-(R_2)I_B + (R_2+R_3)I_C = -E_2$$

$$-(40)I_B + (40+100)I_C = -52$$

פתרון המשוואות נותן:

$I_A = I_S = 2(A) \leftarrow$ נתון בשאלה

$$I_B = -0.1(A)$$

$$I_C = -0.4(A)$$

יש לשים לב שהזרמים $I_B$ ו- $I_C$ יצאו שליליים, ולכן הכיוון שלהם בפועל הפוך להנחה ההתחלתית.

נחשב את הזרם ואת ההספק של $R_1$ :

$$I_{R_1} = I_A + I_B = 2 + 0.1 = 2.1(A)$$

$$P_{R_1} = {I_{R_1}}^2 \cdot R_1 = 2.1^2 \cdot 20 = 88.2(W)$$

ב.

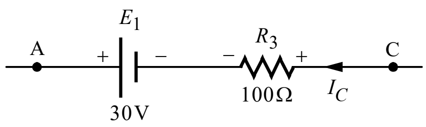
$$I_{E_1} = I_B = 0.1(A)$$

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 30 \cdot 0.1 = 3(W)$$

ג.

$$U_{R_3} = I_C \cdot R_3 = 0.4 \cdot 100 = 40(V)$$

נתאר את מסלול המתחים בין הנקודות אותו בחרנו :




הזרם $I_C$ העובר דרך $R_3$ יצא שלילי כאמור. באיור כאן מובא הכיוון **בפועל** של $I_C$.
בהתאם לכך סומנה קוטביות המתח של $R_3$. מכאן :

$$U_{AC} = +E_1 - U_{R_3} = 30 - 40 = -10(V)$$

## שאלה 2

**הערה:** שאלה זו הופיעה כבר בקיץ 2021 מועד א׳ שאלה 3. נפתור כאן בדרך דומה לפתרון שם.

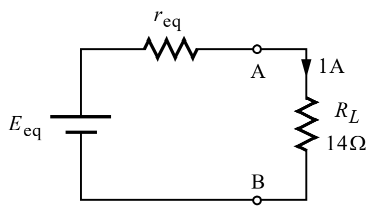
א. נשרטט מעגל שקול ונציין על גביו את הידוע לנו:

נתוני תא בודד:

$E = 1.2\,\text{V}$

$r = 0.2\,\Omega$

$Q = 2\,\text{Ah}$




נתון בשאלה שמשך הזמן הדרוש להפעלת המכשיר הוא 12h. נוכל לחשב את הקיבול השקול של מערך התאים בעזרת הקשר הבא:

$$Q_{eq} = I \cdot t = 1 \cdot 12 = 12\left(\text{Ah}\right)$$

נוכל לחשב את $m$ בעזרת הנוסחה לקיבול שקול של מערך תאים:

$$Q_{eq} = m \cdot Q \quad \Rightarrow$$

$$m = \frac{Q_{eq}}{Q} = \frac{12}{2} = 6$$

לצורך חישוב $n$ נעבוד עם כמה משוואות. נרשום תחילה את הנוסחה לכא״מ השקול:

$$(1)E_{eq} = nE = 1.2n$$

מהפעלת חוק אום על המעגל השקול לעיל מתקבל:

$$(2)E_{eq} = I\left(r_{eq} + R_L\right) = 1\left(r_{eq} + 14\right) = r_{eq} + 14$$

נציב משוואה 2 במשוואה 1 ונקבל:

$$(1)E_{eq} = 1.2n$$

$$(1)r_{eq} + 14 = 1.2n$$

נרשום כעת את הנוסחה להתנגדות השקולה של מערך תאים:

$$(3)r_{eq} = \frac{n \cdot r}{m} = \frac{0.2n}{6}$$

נציב את משוואה 3 במשוואה 1 ונקבל:

$$(1)r_{eq} + 14 = 1.2n$$

$$(1)\frac{0.2n}{6} + 14 = 1.2n$$

פתרון המשוואה נותן:

$$n = 12$$

ב. מהסעיף הקודם ידוע שיש 6 ענפים, שבכל אחד מהם 12 תאים בטור. כעת ישנם רק 5 ענפים כאלה, ועוד ענף **אחד** שונה שבו רק 8 תאים בטור. במילים אחרות יש כאן שני מערכים של תאים:

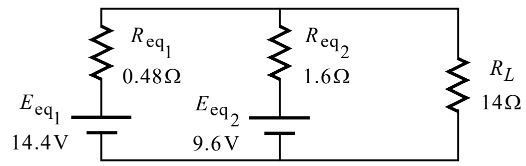
- מערך אחד של תאים המחוברים במעורב, שבו $n_1 = 12$, $m_1 = 5$.
- מערך שני של תאים המחוברים בטור, שבו $n_2 = 8$, $m_2 = 1$ (ענף אחד).

נחשב את הכא״מ השקול ואת ההתנגדות השקולה של שני מערכי התאים:

$$\begin{cases} E_{\text{eq}_1} = n_1 \cdot E = 12 \cdot 1.2 = 14.4\,(\text{V}) \\ r_{\text{eq}_1} = \dfrac{n_1 \cdot r}{m_1} = \dfrac{12 \cdot 0.2}{5} = 0.48\,(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\text{eq}_2} = n_2 \cdot E = 8 \cdot 1.2 = 9.6\,(\text{V}) \\ r_{\text{eq}_2} = \dfrac{n_2 \cdot r}{m_2} = \dfrac{8 \cdot 0.2}{1} = 1.6\,(\Omega) \end{cases}$$

שני המערכים מחוברים במקביל, ומזינים את נגד העומס. נשרטט את המעגל המתקבל:




נפתור במילמן:

$$U_{R_L} = \frac{\dfrac{E_{\text{eq}_1}}{r_{\text{eq}_1}} + \dfrac{E_{\text{eq}_2}}{r_{\text{eq}_2}}}{\dfrac{1}{r_{\text{eq}_1}} + \dfrac{1}{r_{\text{eq}_2}} + \dfrac{1}{R_L}} = \frac{\dfrac{14.4}{0.48} + \dfrac{9.6}{1.6}}{\dfrac{1}{0.48} + \dfrac{1}{1.6} + \dfrac{1}{14}} = 12.950\,(\text{V})$$

$$I_{R_L} = \frac{U_{R_L}}{R_L} = \frac{12.950}{14} = 0.925\,(\text{A})$$

ג. נראה שהאמור בסעיף זה מתייחס למערך המקורי, ולא למערך של הסעיף הקודם. נפתור על סמך הנחה זו.

גם כאן, כמו בסעיף הקודם, רק בענף אחד משהו השתבש, ומכאן שנשארו 5 ענפים תקינים, שהנתונים שלהם זהים לנתוני חמשת הענפים התקינים של הסעיף הקודם. מכאן:

$$E_{\text{eq}_1} = 14.4\,(\text{V})$$

$$r_{\text{eq}_1} = 0.48\,(\Omega)$$

לגבי הענף השונה – שני הכאמ״ים שבקוטביות ההפוכה מקזזים שני כאמ״ים תקינים כך שנשארו 8 כאמ״ים תקינים, שהכא״מ השקול שלהם הוא:

$$E_{\text{eq}_2} = n_2 \cdot E = 8 \cdot 1.2 = 9.6\,(\text{V})$$

לגבי ההתנגדות השקולה של הענף – ישנם 12 התנגדויות פנימיות בטור (שהרי ההתנגדויות לא קוצרו). מכאן:

$$r_{\mathrm{eq}_2}=\frac{n_2\cdot r}{m_2}=\frac{12\cdot 0.2}{1}=2.4(\Omega)$$

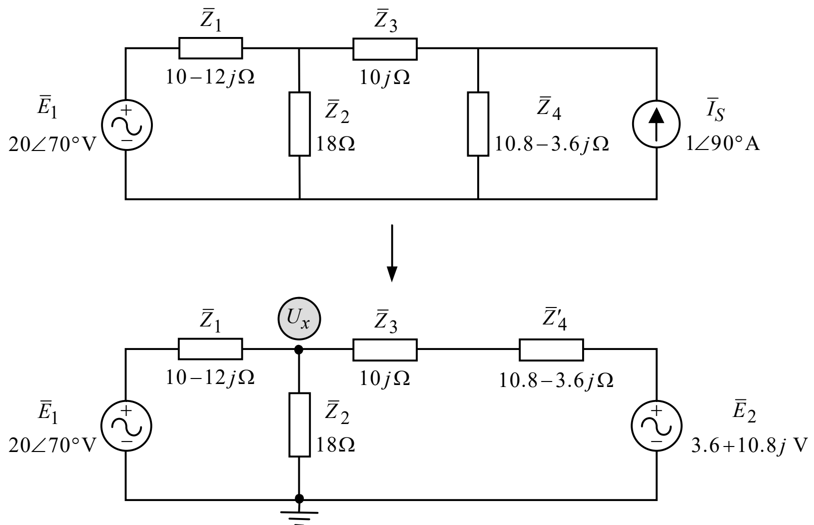
נמצא שנתוני סעיף זה זהים לנתוני הסעיף הקודם, מלבד ההתנגדות השקולה של הענף השונה. נפתור שוב במילמן:

$$U_{R_L}=\frac{\dfrac{E_{\mathrm{eq}_1}}{r_{\mathrm{eq}_1}}+\dfrac{E_{\mathrm{eq}_2}}{r_{\mathrm{eq}_2}}}{\dfrac{1}{r_{\mathrm{eq}_1}}+\dfrac{1}{r_{\mathrm{eq}_2}}+\dfrac{1}{R_L}}=\frac{\dfrac{14.4}{0.48}+\dfrac{9.6}{2.4}}{\dfrac{1}{0.48}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{14}}=13.222(\mathrm{V})$$

$$I_{R_L}=\frac{U_{R_L}}{R_L}=\frac{13.222}{14}=0.944(\mathrm{A})$$

## <u>שאלה 3</u>

א. נשרטט מעגל שקול ולאחר מכן נבאר:




**ביאור:** המעגל העליון הוא המעגל הנתון בשאלה. לשם הנוחות, את כל ההתנגדויות וההיגבים הצגנו כעכבות. העכבה $\bar{Z}_4$ התקבלה מהחיבור במקביל של $R_3$ ו- $X_{C_2}$, באופן הבא:

$$\bar{Z}_4=\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{-jX_{C_2}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{-j36}\right)^{-1}=10.8-3.6j(\Omega)$$

קיבלנו מעגל עם שני צמתים (או שלושה חוגים). לצורך הפתרון יש לעשות שימוש במחשבון מתאים, המסוגל לפתור מערכת משוואות במספרים מרוכבים. נכון לזמן כתיבת שורות אלו, ביד רוב הסטודנטים לא מצוי מחשבון מסוג זה. לפיכך ביצענו המרת מקורות – את מקור הזרם המרנו למקור מתח, וכך קיבלנו את המעגל התחתון, שבו צומת אחד בלבד. את הערכים של המקור והעכבה החדשים קיבלנו באופן הבא:

$$\bar{Z}'_4=\bar{Z}_4=10.8-3.6j(\Omega)$$

$$\bar{E}_2=\bar{I}_S\cdot\bar{Z}_4=(1\angle90°)\cdot(10.8-3.6j)=3.6+10.8j(\text{V})$$

נציין כי למרות שלרוב מקובל להציג מתחים בהצגה פולארית, הצגנו את $\bar{E}_2$ במקרה זה בהצגה קרטזית, לשם הדיוק (בהצגה הפולארית לא מתקבלים מספרים שלמים).

נמצא את המתח המבוקש בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_x=\frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_3+\bar{Z}'_4}}{\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3+\bar{Z}'_4}}=\frac{\frac{20\angle70°}{10-12j}+\frac{3.6+10.8j}{10j+10.8-3.6j}}{\frac{1}{10-12j}+\frac{1}{18}+\frac{1}{10j+10.8-3.6j}}=10.291\angle85.635°(\text{V})$$

ב.

$$\bar{I}_{E_1}=\frac{\bar{E}_1-\bar{U}_x}{\bar{Z}_1}=\frac{20\angle70°-10.291\angle85.635°}{10-12j}\approx0.67\angle104.82°(\text{A})$$

ג.

$$\overline{S}_{E_1} = \overline{E}_1 \cdot \overline{I}_{E_1}^{\ *} = (20\angle 70°)(0.669\angle -104.82°) \approx 11 - 7.65j \approx 13.4\angle -34.82° (\mathrm{VA})$$

מכאן:

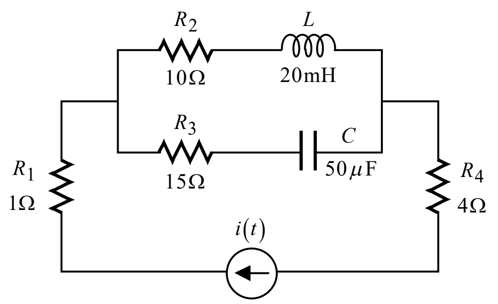
$$P_{E_1} = 11(\mathrm{W})$$

$$Q_{E_1} = 7.65(\mathrm{VAR})$$

$$S_{E_1} = 13.4(\mathrm{VA})$$

## שאלה 4

א.




בשאלה זו מדובר על **תהודה במעגל מקבילי מעשי**. לנגדים $R_1$ ו- $R_4$ אין השפעה על תדר התהודה. התהודה מתרחשת בין הסליל והקבל והנגדים $R_2$ ו- $R_3$ המחוברים אליהם בטור. נרשום את הנוסחה המתאימה לסוג תהודה זאת, תוך שאנו מתאימים את הנוסחה למעגל שלנו:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_0{}^2 - R_L{}^2}{R_0{}^2 - R_C{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_2{}^2}{\frac{L}{C} - R_3{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{20\times10^{-3}\cdot50\times10^{-6}}}\sqrt{\frac{\frac{20\times10^{-3}}{50\times10^{-6}} - 10^2}{\frac{20\times10^{-3}}{50\times10^{-6}} - 15^2}} =$$

$$= 1309.307\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

ב. מקור הזרם נתון על ידי:

$$i(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{A})$$

נציג את זרם המקור בהצגה חלקית (פאזורית). לגבי הזווית – מאופן הצגתה ניתן להבין כי היא נתונה ברדיאנים. כידוע הגודל $\pi$ ברדיאנים שקול ל- $180°$ במעלות. מכאן:

$$\overline{I}_S = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle -\left(\frac{180°}{3}\right) = 10\angle -60°(\text{A})$$

נחשב את היגב הסליל והיגב הקבל (נציין כי אין לומר כאן שהסליל והקבל נתק או קצר, וכמו כן אין ההיגבים שלהם שווים. מצבים אלה מתרחשים בתהודה טורית או בתהודה במעגל מקבילי **אידיאלי**):

$$X_L = \omega L = 1309.307\cdot20\times10^{-3} = 26.186(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1309.307\cdot50\times10^{-6}} = 15.275(\Omega)$$

ניעזר בכלל מחלק הזרם ונחשב את הזרמים המבוקשים:

$$\overline{I}_L = \frac{\overline{I}_S\cdot(R_3 - jX_C)}{R_2 + jX_L + R_3 - jX_C} = \frac{(10\angle -60°)(15 - j15.275)}{10 + j26.186 + 15 - j15.275} = 7.848\angle -129.09°(\text{A})$$

$$\overline{I}_C = \overline{I}_S - \overline{I}_L = 10\angle -60° - 7.848\angle -129.09° = 10.276\angle -14.47°(\text{A})$$

ג. נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2 + jX_L} + \frac{1}{R_3 - jX_C}\right)^{-1} + R_4 = 1 + \left(\frac{1}{10 + j26.186} + \frac{1}{15 - j15.275}\right)^{-1} + 4 = 27(\Omega)$$

קיבלנו מספר ממשי טהור, ללא כל חלק מדומה (תוצאה מדויקת מעין זו מתקבלת כאשר עובדים עם ערכים מדויקים במחשבון). מכאן שזווית המופע של העכבה השקולה, שהיא גם זווית המופע של המעגל, שווה לאפס. נחשב את גורם ההספק של המעגל:

$$PF = \cos\phi = \cos(0) = 1$$

נציין כי בכל סוגי התהודה, העכבה הכללית חייבת להיות מספר ממשי טהור, והזווית שלה היא תמיד אפס, ולכן גורם ההספק בתהודה הוא תמיד 1. מכל מקום לשם ההבנה הצגנו את חישוב העכבה השקולה, מה גם שחישוב זה נצרך הלאה.

נחשב את המתח של מקור הזרם בעזרת חוק אום:

$$\bar{U}_{I_S} = \bar{I}_S \cdot \bar{Z}_{\mathrm{T}} = (10\angle -60°)\cdot(27) = 270\angle -60°(\mathrm{V})$$

ד. בסעיף הקודם ראינו שהעכבה השקולה היא מספר ממשי טהור, ללא $j$. כלומר אין חלק היגבי בעכבה. כיוון שכך, ההספק ההיגבי $Q$ במעגל הוא אפס. קיים רק **הספק ממשי** $P$. נחשב הספק זה:

$$P_{I_S} = P_{\mathrm{T}} = \left|\bar{I}_S\right|^2 \cdot \bar{Z}_{\mathrm{T}} = 10^2 \cdot 27 = 2700(\mathrm{W})$$

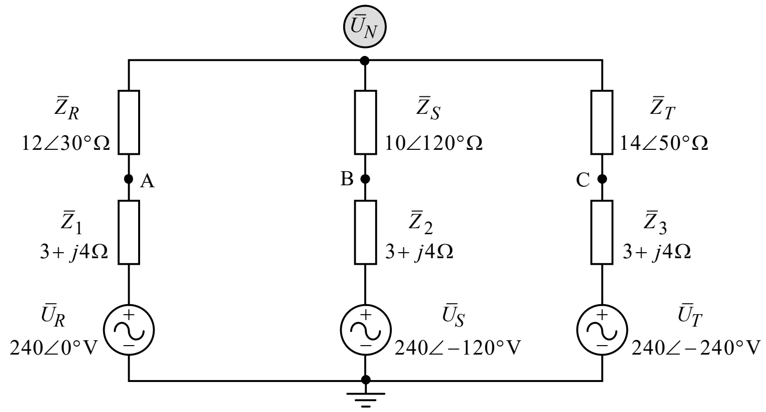
דרך נוספת:

$$\bar{S}_{I_S} = \bar{U}_{I_S} \cdot \bar{I}_S^{\,*} = (270\angle -60°)(10\angle +60°) = 2700 + 0j\ (\mathrm{VA})$$

קיבלנו ש- $\bar{S}_{I_S}$ הוא מספר ממשי, ללא חלק מדומה. כידוע, החלק הממשי של $\bar{S}$ הוא $P$, והחלק המדומה הוא $Q$. נמצא שכל ההספק של מקור הזרם הוא הספק ממשי בלבד $P$.

## **שאלה 5**

א. נסובב את המעגל שבשאלה $90°$ שמאלה, ונשרטט אותו מחדש בצורה הנוחה לפתרון:




המעגל שלפנינו הוא מעגל תלת פאזי שבו גם המקורות וגם העומס בחיבור כוכב. לא מדובר במעגל מאוזן, שהרי העומסים על הענפים השונים אינם זהים כולם זה לזה. הלכך אין לעשות כאן שימוש בנוסחאות מוכנות. את המתח המבוקש נוכל לחשב בקלות בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_N=\frac{\dfrac{\bar{U}_R}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_R}+\dfrac{\bar{U}_S}{\bar{Z}_2+\bar{Z}_S}+\dfrac{\bar{U}_T}{\bar{Z}_3+\bar{Z}_T}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_R}+\dfrac{1}{\bar{Z}_2+\bar{Z}_S}+\dfrac{1}{\bar{Z}_3+\bar{Z}_T}}=\frac{\dfrac{240\angle0°}{3+j4+12\angle30°}+\dfrac{240\angle-120°}{3+j4+10\angle120°}+\dfrac{240\angle-240°}{3+j4+14\angle50°}}{\dfrac{1}{3+j4+12\angle30°}+\dfrac{1}{3+j4+10\angle120°}+\dfrac{1}{3+j4+14\angle50°}}=$$

$$=89.430\angle150.32°(\mathrm{V})$$

ב.

$$\bar{I}_R=\frac{\bar{U}_R-\bar{U}_N}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_R}=\frac{240\angle0°-89.430\angle150.32°}{3+j4+12\angle30°}=19.191\angle-44.68°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_S=\frac{\bar{U}_S-\bar{U}_N}{\bar{Z}_2+\bar{Z}_S}=\frac{240\angle-120°-89.430\angle150.32°}{3+j4+10\angle120°}=19.945\angle161.49°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_T=\frac{\bar{U}_T-\bar{U}_N}{\bar{Z}_3+\bar{Z}_T}=\frac{240\angle-240°-89.430\angle150.32°}{3+j4+14\angle50°}=8.894\angle53.67°(\mathrm{A})$$

ג. בחישוב הזרמים שבסעיף הקודם, הנחנו כי הכיוון של כל הזרמים הוא כלפי מעלה, ולכן חיסרנו בזרם הראשון למשל $\bar{U}_R-\bar{U}_N$ ולא להיפך. בהתאם לכך תיקבע קוטביות המתח של העכבות – ההדק העליון שלהן יקבל סימן ״מינוס״. נחשב את המתחים המבוקשים בעזרת מסלול מתחים בין הנקודות לאדמה:

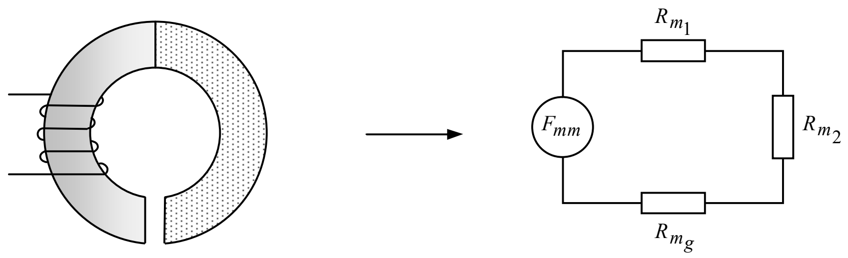
$$\bar{U}_\mathrm{A}=-\bar{I}_R\cdot\bar{Z}_1+\bar{U}_R=-(19.191\angle-44.68°)(3+j4)+240\angle0°=145.76\angle-5.54°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_\mathrm{B}=-\bar{I}_S\cdot\bar{Z}_2+\bar{U}_S=-(19.945\angle161.49°)(3+j4)+240\angle-120°=155.86\angle-104.08°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_\mathrm{C}=-\bar{I}_T\cdot\bar{Z}_3+\bar{U}_T=-(8.894\angle53.67°)(3+j4)+240\angle-240°=196.96\angle122.95°(\mathrm{V})$$

## **שאלה 6**

א.




בצד שמאל של האיור מופיע המעגל המגנטי שבשאלה. בצד ימין מופיע "המעגל החשמלי" האנלוגי למעגל המגנטי. המיאונים $R_{m_1}$ ו- $R_{m_2}$ הם המיאונים של שני החומרים שבליבה. המיאון $R_{m_g}$ הוא מיאון חריץ האוויר. נרכז נתונים:

$$\ell_g = 1(\text{mm}) = 1\times10^{-3}(\text{m})$$

$$\ell_1 = \ell_2 = \frac{24\text{cm}-1\text{mm}}{2} = \frac{24\times10^{-2}-1\times10^{-3}}{2} = 0.1195(\text{m})$$

$$A = 150\left(\text{mm}^2\right) = 150\times10^{-6}\left(\text{m}^2\right)$$

$$\mu_{r_1} = 1500$$

$$\mu_{r_2} = 2400$$

$$N = 260$$

יש לשים לב לחישוב האורך של שני חלקי הליבה. מהאורך הכולל הנתון $(24\text{cm})$ החסרנו את אורך חריץ האוויר $(1\text{mm})$. את התוצאה חילקנו ב-2 שהרי האורך של כל חומר הוא חצי מהאורך הכולל.

נחשב תחילה את המיאון הכללי של הליבה:

$$R_{m_1} = \frac{\ell_1}{\mu_0\mu_{r_1}A} = \frac{0.1195}{4\pi10^{-7}\cdot1500\cdot150\times10^{-6}} = 422.644\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_2} = \frac{\ell_2}{\mu_0\mu_{r_2}A} = \frac{0.1195}{4\pi10^{-7}\cdot2400\cdot150\times10^{-6}} = 264.152\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0\cancel{\mu_r}A} = \frac{1\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot150\times10^{-6}} = 5.305\times10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_T} = R_{m_1}+R_{m_2}+R_{m_g} = 422.644\times10^3+264.152\times10^3+5.305\times10^6 = 5.991\times10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

נחשב את השראות הסליל בעזרת הנוסחה הבאה:

$$L = \frac{N^2}{R_{m_T}} = \frac{260^2}{5.991\times10^6} = 0.011(\text{H}) = 11.281(\text{mH})$$

ב. נתון בשאלה $B=0.6(\mathrm{T})$ . נחשב תחילה את השטף במעגל:

$$\phi = B\cdot A = 0.6\cdot 150\times10^{-6} = 90(\mu\mathrm{Wb})$$

מכאן:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_{m_\mathrm{T}}} = \frac{NI}{R_{m_\mathrm{T}}} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{\phi\cdot R_{m_\mathrm{T}}}{N} = \frac{90\times10^{-6}\cdot 5.991\times10^{6}}{260} = 2.074(\mathrm{A})$$

חישבנו את הזרם בסליל. נחשב את המתח על הסליל. בשאלה נתון שהסליל מוזן ממקור מתח DC, מה שאומר שהסליל קֶצר (במצב המתמיד). כלומר אין לו היגב כמו ב-AC.

יש לסליל מכל מקום התנגדות אוהמית. בשאלה מובאים נתוני התיל ממנו עשוי הסליל: $\ell=50(\mathrm{m})$ , $A=0.2\left(\mathrm{mm}^2\right)$ , $\rho=0.0175\left(\Omega\cdot\mathrm{mm}^2/m\right)$ . נזכיר שבחישוב התנגדות כתלות בתכונות החומר, את שטח החתך יש להציב ב- $\mathrm{mm}^2$ כפי הנתון, ואין להמיר ל- $\mathrm{m}^2$ . מכאן:

$$R_L = \frac{\rho\ell}{A} = \frac{0.0175\cdot 50}{0.2} = 4.375(\Omega)$$

$$U_L = I\cdot R = 2.074\cdot 4.375 = 9.074(\mathrm{V})$$

ג. נתון שהזרם בסליל יורד בקצב ליניארי (כלומר בקצב קבוע). הלכך נוכל לחשב בעזרת הנוסחה לכא״מ מושרה בצורתה הפשוטה, שאינה כוללת נגזרת:

$$E_L = L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 11.281\times10^{-3}\cdot\frac{2.074-0}{2\times10^{-3}} = 11.7(\mathrm{V})$$

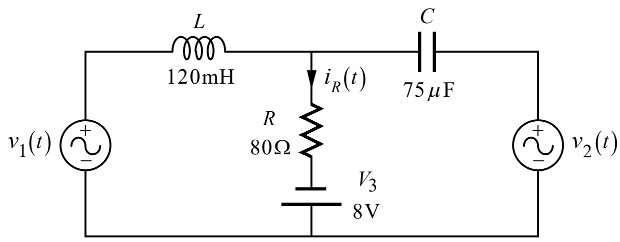
**הערה:** אין הכרח להוסיף את סימן ה״מינוס״ שלפני הנוסחה. סימן זה רק בא לומר, שהכא״מ בסליל מתפתח בכיוון כזה, שמתנגד למגמת השינוי בזרם.

ד. כאשר הסליל מחובר למקור AC, יש לו גם היגב (בנוסף על ההתנגדות האוהמית). נחשב את ההיגב ואת הזרם בסליל. נתון בסעיף זה $f=200\mathrm{Hz}$ , $\bar{U}_L=110\mathrm{V}$ . מכאן:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi\cdot 200\cdot 11.281\times10^{-3} = 14.177(\Omega)$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}_L}{R_L + jX_L} = \frac{110}{4.375 + j14.177} = 7.413\angle -72.84^\circ(\mathrm{A})$$

## שאלה 7




נתון:

$$v_1(t)=10\sqrt{2}\sin(314t)(\mathrm{V})$$

$$v_2(t)=15\sqrt{2}\sin(628t+60°)(\mathrm{V})$$

א. מכיוון שהמעגל הנתון מכיל מקורות מסוגים שונים, יש לפתור בסופרפוזיציה.

**תרומת $v_1(t)$ :**

נתון:

$$v_1(t)=10\sqrt{2}\sin(314t)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

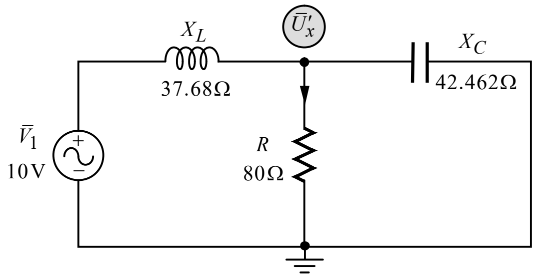
$$\bar{V}_1=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=10(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L=\omega L=314\cdot 120\times 10^{-3}=37.68(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{314\cdot 75\times 10^{-6}}=42.462(\Omega)$$

נקצר את $v_2(t)$ ואת $V_3$, ונשרטט את המעגל המתקבל:




ניעזר במשפט מילמן ונחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{U}'_x=\frac{\frac{\bar{V}_1}{jX_L}}{\frac{1}{jX_L}+\frac{1}{R}+\frac{1}{-jX_C}}=\frac{\frac{10}{j37.68}}{\frac{1}{j37.68}+\frac{1}{80}+\frac{1}{-j42.462}}=20.649\angle-76.55°(\mathrm{V})$$

$$\bar{I}'_R=\frac{\bar{U}'_x}{R}=\frac{20.649\angle-76.55°}{80}=0.258\angle-76.55°(\mathrm{A})$$

**תרומת $v_2(t)$ :**

נתון:

$$v_2(t)=15\sqrt{2}\sin(628t+60°)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

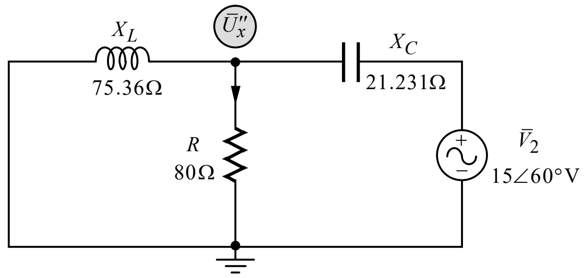
$$\bar{V}_2=\frac{15\sqrt{2}\angle 60°}{\sqrt{2}}=15\angle 60°(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L = \omega L = 628\cdot 120\times 10^{-3} = 75.36(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{628\cdot 75\times 10^{-6}} = 21.231(\Omega)$$

נקצר את $v_1(t)$ ואת $V_3$, ונשרטט את המעגל המתקבל:



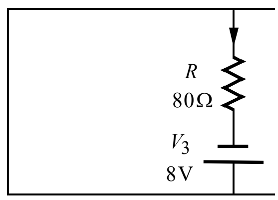

ניעזר במשפט מילמן ונחשב את הזרם המבוקש:

$$\bar{U}_x'' = \frac{\dfrac{\bar{V}_2}{-jX_C}}{\dfrac{1}{jX_L}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{-jX_C}} = \frac{\dfrac{15\angle 60^\circ}{-j21.231}}{\dfrac{1}{j75.36}+\dfrac{1}{80}+\dfrac{1}{-j21.231}} = 19.589\angle 80.27^\circ(\mathrm{V})$$

$$\bar{I}_R'' = \frac{\bar{U}_x''}{R} = \frac{19.589\angle 80.27^\circ}{80} = 0.244\angle 80.27^\circ(\mathrm{A})$$

**תרומת $V_3$:**

עבור מקור DC הסליל שקול לקֶצר והקבל שקול לנֶתק (במצב המתמיד). נקצר את $v_1(t)$ ואת $v_2(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל:




$$I_R''' = \frac{V_3}{R} = \frac{8}{80} = 0.1(\mathrm{A})$$

**נסכם את התרומות:** כל הזרמים של הנגד $R$ שתורמים כל המקורות, פועלים כולם באותו הכיוון – מלמעלה למטה. לכן כולם יופיעו בסימן חיובי. את הזרם הכולל נציג כתלות בזמן כנדרש בפתרון בספורפוזיציה, וכנדרש בשאלה עצמה. מכאן:

$$i_R(t) = i'(t)+i''(t)+i'''(t) =$$

$$= 0.258\sqrt{2}\sin(314t-76.55^\circ)+0.244\sqrt{2}\sin(628t+80.27^\circ)+0.1(\mathrm{A})$$

ב. הערך הממוצע שווה תמיד לערך ה-DC. מכאן:

$$I_{R\,(\mathrm{av})} = I_R''' = 0.1(\mathrm{A})$$

ג. את הערך היעיל השקול נחשב בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

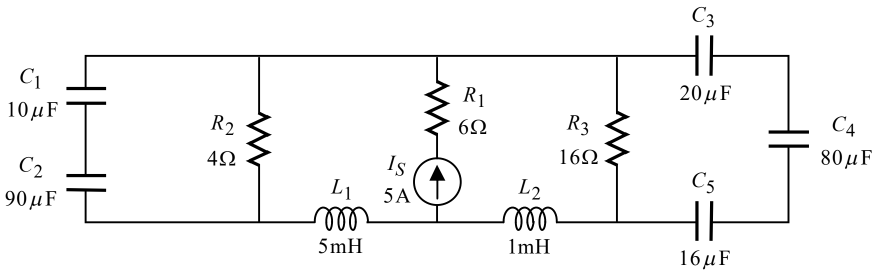
$$I_{R\,(\mathrm{rms})} = \sqrt{I_{\mathrm{rms}_1}^2 + I_{\mathrm{rms}_2}^2 + I_{\mathrm{rms}_3}^2} = \sqrt{0.258^2 + 0.244^2 + 0.1^2} = 0.3695(\mathrm{A})$$

ד. את **ההספק הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת הערך **היעיל**. מכאן:

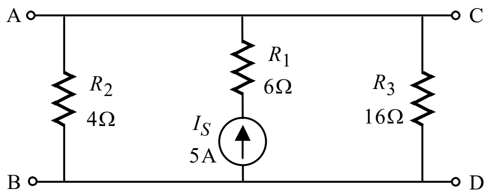
$$P_R = I_{R\,(\mathrm{rms})}^2 \cdot R = 0.3695^2 \cdot 80 = 10.926(\mathrm{W})$$

## **שאלה 8**

א.




במצב המתמיד (שהוא ברירת המחדל אם לא נאֱמר אחרת), הסלילים שקולים לקֶצר והקבלים שקולים לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:




$$I_{L_1} = I_{R_2} = \frac{I_S \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 16}{4+16} = 4(\text{A})$$

$$I_{L_2} = I_{R_3} = I_S - I_{R_2} = 5 - 4 = 1(\text{A})$$

$$W_{L_1} = \frac{L_1 \cdot {I_{L_1}}^2}{2} = \frac{5\times 10^{-3} \cdot 4^2}{2} = 0.04(\text{J}) = 40(\text{mJ})$$

$$W_{L_2} = \frac{L_2 \cdot {I_{L_2}}^2}{2} = \frac{1\times 10^{-3} \cdot 1^2}{2} = 0.5(\text{mJ})$$

ב. נחשב תחילה את **הקיבול** השקול בכל צד של המעגל:

$$C_{1-2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10\mu} + \frac{1}{90\mu}\right)^{-1} = 9(\mu\text{F})$$

$$C_{3-5} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{20\mu} + \frac{1}{80\mu} + \frac{1}{16\mu}\right)^{-1} = 8(\mu\text{F})$$

נחשב את **המתח** הנופל על כל אחד מהקבלים השקולים:

$$U_{C_{1-2}} = U_{R_2} = I_{R_2} \cdot R_2 = 4 \cdot 4 = 16(\text{V})$$

$$U_{C_{3-5}} = U_{R_3} = I_{R_3} \cdot R_3 = 1 \cdot 16 = 16(\text{V})$$

נחשב את **המטען** של כל אחד מהקבלים השקולים:

$$Q_{C_{1-2}} = C_{1-2} \cdot U_{C_{1-2}} = 9\mu \cdot 16 = 144(\mu\text{C})$$

$$Q_{C_{3-5}} = C_{3-5} \cdot U_{C_{3-5}} = 8\mu \cdot 16 = 128(\mu\text{C})$$

כידוע לקבלים בטור יש מטען זהה. המטען של הקבלים השקולים שחישבנו הוא גם המטען של כל קבל, בהתאמה. ובניסוח מתמטי:

$$Q_{C_{1-2}} = Q_{C_1} = Q_{C_2} = 144(\mu\text{C})$$

$$Q_{C_{3-5}} = Q_{C_3} = Q_{C_4} = Q_{C_5} = 128(\mu\text{C})$$

נחשב את המתח של כל קבל בנפרד:

$$U_{C_1} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{144\mu}{10\mu} = 14.4(\text{V})$$

$$U_{C_2} = \frac{Q_{C_2}}{C_2} = \frac{144\mu}{90\mu} = 1.6(\text{V})$$

$$U_{C_3} = \frac{Q_{C_3}}{C_3} = \frac{128\mu}{20\mu} = 6.4(\text{V})$$

$$U_{C_4} = \frac{Q_{C_4}}{C_4} = \frac{128\mu}{80\mu} = 1.6(\text{V})$$

$$U_{C_5} = \frac{Q_{C_5}}{C_5} = \frac{128\mu}{16\mu} = 8(\text{V})$$

ג.

$$U_{I_S} = U_{R_1} + U_{R_2} = I_S \cdot R_1 + I_{R_2} \cdot R_2 = 5\cdot 6 + 4\cdot 4 = 46(\text{V})$$

$$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 46\cdot 5 = 230(\text{W})$$