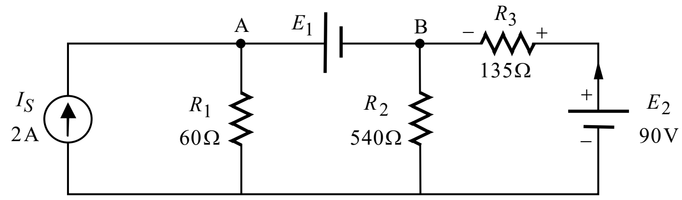
פתרון מלא לבחינת מה"ט בתורת החשמל – אביב 2024 מועד א'

<u>שאלה 1</u>

א.



נציין כבר עכשיו כי הפתרון שנציג כאן, דורש שליטה טובה בשיטת המסלולים לחישוב מתח בין שתי נקודות במעגל חשמלי (אנו נבאר בקצרה כל שלב. הרחבה על שיטה זו ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי זרם ישר).

נתון ש- E_2 הוא ספק. מכאן שהזרם יוצא מההדק החיובי שלו, וכפי המתואר באיור. עוד נתון כי ההספק של E_2 הוא 30W. נחשב את הזרם של מקור זה, שהוא גם הזרם של R_3:

$$P_{E_2}=E_2\cdot I_{E_2}\quad\Rightarrow$$

$$I_{E_2}=\frac{P_{E_2}}{E_2}=\frac{30}{90}=0.333(\text{A})$$

נחשב את המתח של R_3:

$$U_{R_3}=I_{E_2}\cdot R_3=0.333\cdot 135=45(\text{V})$$

נחשב את המתח של R_2 בעזרת מסלול מתחים העובר דרך הענף הימני. נצא מנקודה B ונקבל:

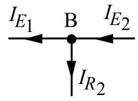
$$U_{R_2}=-U_{R_3}+E_2=-45+90=45(\text{V})$$

קיבלנו תוצאה חיובית, מה שאומר שנקודת המוצא (נקודה B) תקבל סימן "פלוס". מכאן שהזרם דרך R_2 זורם מלמעלה למטה (בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי. כלל זה נכון גם בכיוון ההפוך – בנקודה בה יש סימן חיובי, שם נכנס הזרם). נחשב את הזרם דרך R_2:

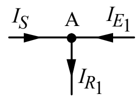
$$I_{R_2}=\frac{U_{R_2}}{R_2}=\frac{45}{540}=0.083(\text{A})$$

נפעיל את חוק הזרמים על צומת B ונקבל:

$$I_{E_1}=I_{E_2}-I_{R_2}=0.333-0.083=0.25(\text{A})$$



כיוון הזרם I_{E_1} הוא שמאלה כמתואר באיור עזר כאן. נפעיל כעת את חוק הזרמים על צומת A ונקבל:

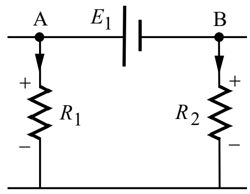


$$I_{R_1} = I_S + I_{E_1} = 2 + 0.25 = 2.25(\mathrm{A})$$

נחשב את המתח על R_1:

$$U_{R_1} = I_{R_1} \cdot R_1 = 2.25 \cdot 60 = 135(\mathrm{V})$$

נחשב את E_1 בעזרת מסלול מתחים היוצא מנקודה A:



$$E_1 = +U_{R_1} - U_{R_2} = 135 - 45 = 90(\mathrm{V})$$

ב. מסלול מתחים בין הדקיו של מקור הזרם נותן:

$$U_{I_S} = +U_{R_1} = 135(\mathrm{V})$$

המתח של מקור הזרם יצא חיובי ולכן הוא **ספק**. נחשב את ההספק שלו:

$$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 135 \cdot 2 = 270(\mathrm{W})$$

לגבי E_1, הזרם דרכו יוצא מההדק החיובי ולכן גם מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק שלו:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 90 \cdot 0.25 = 22.5(\mathrm{W})$$

שאלה 2

שאלה זו הופיעה כבר באביב 2022 מועד ב', שאלה 2. נפתור בדרך דומה לדרך שפתרנו שם.

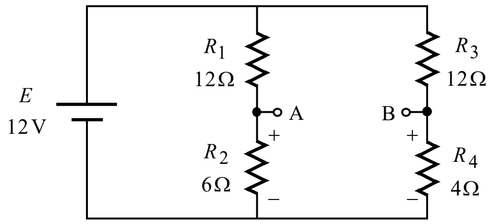
א. לא יזרום זרם דרך R_L במצב של גשר ויטסטון מאוזן. נחשב בעזרת הנוסחה לגשר מאוזן (כפל בהצלבה של נגדי הגשר):

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \quad \Rightarrow$$

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_2} = \frac{12 \cdot 4}{6} = 8(\Omega)$$

ב. **<u>חישוב מתח תבנין:</u>**

ננתק את R_L ונשרטט את המעגל המתקבל:



המתח E_{Th} הוא המתח בין A ל-B. נחשב מתח זה בעזרת מסלול מתחים העובר דרך R_2 ו-R_4. קוטביות מתחי נגדים אלה סומנה מראש על גבי האיור (בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן חיובי). נחשב את מתחי הנגדים ואת E_{Th}:

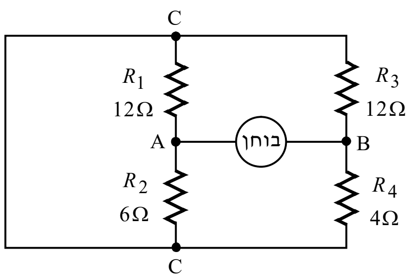
$$U_{R_2} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 6}{12+6} = 4(\text{V})$$

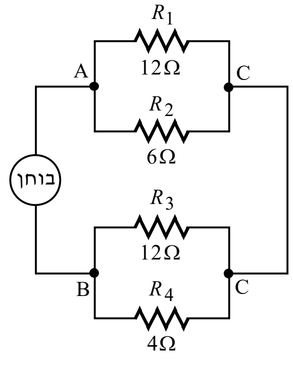
$$U_{R_4} = \frac{E \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{12 \cdot 4}{12+4} = 3(\text{V})$$

$$E_{\text{Th}} = U_{\text{AB}} = +U_{R_2} - U_{R_4} = 4 - 3 = 1(\text{V})$$

<u>חישוב התנגדות תבנין:</u>

נקצר את מקור המתח, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:



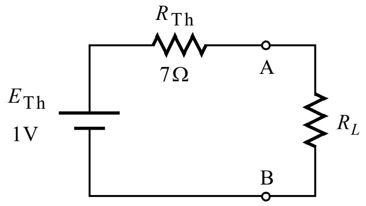


ביאור: בצד שמאל של האיור שרטטנו את המעגל המתקבל לאחר קיצורו של מקור המתח. הקצר הנוצר גורם לקושי מסוים בזיהוי הנכון של צורת החיבור בין הנגדים. במקרים מסוג זה מומלץ לסמן את כל הצמתים באותיות, ולזהות "צמתים זהים". צמתים זהים הם צמתים שביניהם מפריד חוק קצר בלבד. במקרה זה סומן צומת C משני צדדיו של חוט הקצר (הרחבה על "שיטת הצמתים הזהים" לסידור מעגל חשמלי סבוך, ראה בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי זרם ישר).

נמצא שהנגדים R_1 ו- R_2 שניהם מתוחים בין A ל-C. כמו כן הנגדים R_3 ו- R_4 שניהם מתוחים בין B ל-C. בצד ימין של האיור שרטטנו את המעגל בצורה "מסודרת" יותר, תוך שאנו מקפידים לחבר כל רכיב בין אותם צמתים אליהם היה מחובר במעגל המקורי שבצד שמאל. מכאן:

$$R_{\text{Th}} = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)^{-1} = 7(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנין שקיבלנו:



הערה: הרחבה על הנידון של חישוב התנגדות שקולה עבור מקרים סבוכים ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל", בפרק העוסק במעגלי זרם ישר (ראה שם תחת הנידון של "שיטת הצמתים הזהים").

ג. התנאי להעברת הספק מקסימלי עבור מעגלי DC הוא:

$$R_L = R_{\text{Th}} = 7(\Omega)$$

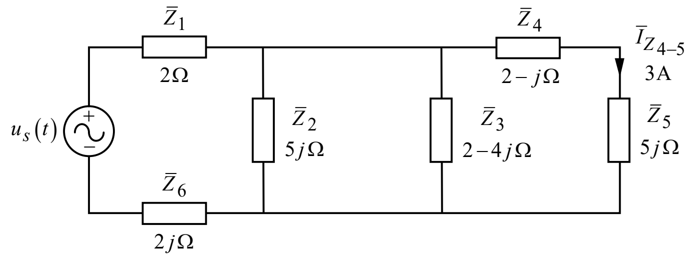
ד. ניעזר במעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את ההספק של R_L:

$$I_{R_L} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}+R_L} = \frac{1}{7+7} = 0.071(\text{A})$$

$$P_{R_L} = I_{R_L}{}^2 \cdot R_L = 0.071^2 \cdot 7 = 0.035(\text{W}) = 35.714(\text{mW})$$

<u>שאלה 3</u>

א.



נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_{4-5} = \bar{Z}_4 + \bar{Z}_5 = 2 - j + 5j = 2 + 4j\left(\Omega\right)$$

$$\bar{Z}_{2-5} = \left(\frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_{4-5}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5j} + \frac{1}{2-4j} + \frac{1}{2+4j}\right)^{-1} = 2.5 + 2.5j\left(\Omega\right)$$

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{2-5} + \bar{Z}_6 = 2 + 2.5 + 2.5j + 2j = 4.5 + 4.5j = 6.363\angle 45°\left(\Omega\right)$$

ניעזר בזווית של העכבה השקולה ונחשב את גורם ההספק של המעגל:

$$PF = \cos\phi = \cos\left(45°\right) = 0.707$$

אופי המעגל – הזווית של העכבה השקולה היא חיובית, ולכן למעגל יש **אופי השראִי**.

ב. נתון $\bar{I}_{Z_{4-5}} = 3\left(\mathrm{A}\right)$. מכאן:

$$\bar{U}_{Z_{4-5}} = \bar{I}_{Z_{4-5}} \cdot \bar{Z}_{4-5} = 3\cdot\left(2+4j\right) = 13.416\angle 63.43°\left(\mathrm{V}\right)$$

$$\bar{U}_{Z_2} = \bar{U}_{Z_3} = \bar{U}_{Z_{4-5}} = 13.416\angle 63.43°\left(\mathrm{V}\right)$$

$$\bar{I}_{Z_2} = \frac{\bar{U}_{Z_2}}{\bar{Z}_2} = \frac{13.416\angle 63.43°}{5j} = 2.683\angle -26.56°\left(\mathrm{A}\right)$$

$$\bar{I}_{Z_3} = \frac{\bar{U}_{Z_3}}{\bar{Z}_3} = \frac{13.416\angle 63.43°}{2-4j} = 3\angle 126.86°\left(\mathrm{A}\right)$$

$$\bar{I}_{\mathrm{T}} = \bar{I}_{Z_2} + \bar{I}_{Z_3} + \bar{I}_{Z_{4-5}} = 2.683\angle -26.56° + 3\angle 126.86° + 3 = 3.794\angle 18.43°\left(\mathrm{A}\right)$$

$$\bar{U}_S = \bar{I}_{\mathrm{T}} \cdot \bar{Z}_{\mathrm{T}} = \left(3.794\angle 18.43°\right)\left(4.5+4.5j\right) = 24.149\angle 63.43°\left(\mathrm{V}\right)$$

ג. נתון שתדר המקור הוא $f = 60\left(\mathrm{Hz}\right)$. מכאן:

$$u_s\left(t\right) = 24.149\sqrt{2}\sin\left(2\pi 60t + 63.43°\right)\left(\mathrm{V}\right)$$

ד.

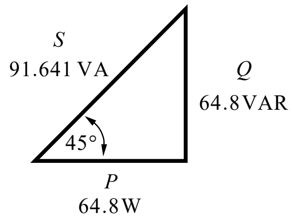
$$\bar{S}_{U_S} = \bar{U}_S \cdot \bar{I}_T{}^* = (24.149\angle 63.43°)(3.794\angle -18.43°) = 64.8 + 64.8j = 91.641\angle 45°(\text{VA})$$

מכאן:

$$P = 64.8(\text{W})$$

$$Q = 64.8(\text{VAR})$$

$$S = 91.641(\text{VA})$$



ה. נתון $\bar{Z}_4 = 2 - j\Omega$. החלק המדומה של עכבה זו הוא שלילי, ולכן לעכבה זו יש אופי קיבולי. מכאן שניתן לייצג עכבה זו בעזרת נגד וקבל המחוברים בטור. התנגדות הנגד שווה לערך החלק הממשי של העכבה:

$$R_{(\bar{Z}_4)} = 2(\Omega)$$

היגב הקבל שווה לערך המוחלט של החלק המדומה של העכבה:

$$X_{C(\bar{Z}_4)} = 1(\Omega)$$

נחשב את קיבול הקבל כנדרש בשאלה:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 1} = 2.652(\text{mF})$$

שאלה 4

א.　זרם המקור נתון על ידי:

$$i_s(t) = 5\sqrt{2}\sin(2500t)(\text{A})$$

נתון $X_C = 16\Omega$. ניעזר בתדר הנתון בביטוי הזרם, ונחשב את קיבול הקבל:

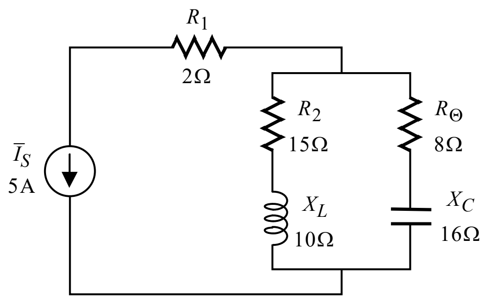
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2500 \cdot 16} = 25(\mu\text{F})$$

ב.　נתון שבטמפרטורה של $20°\text{C}$ הנגד R_Θ שווה ל- 8Ω. נציג את זרם המקור בהצגה פאזורית, נחשב את היגב הסליל, ונשרטט מעגל שקול:

$$\bar{I}_S = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5(\text{A})$$

$$X_L = \omega L = 2500 \cdot 4 \times 10^{-3} = 10(\Omega)$$



נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_\text{T} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2 + jX_L} + \frac{1}{R_\Theta - jX_C}\right)^{-1} = 2 + \left(\frac{1}{15 + j10} + \frac{1}{8 - j16}\right)^{-1} = 15.097 - j3.539(\Omega)$$

למסקנה – מכיוון שיש לעכבה חלק מדומה, **המעגל אינו בתהודה**.

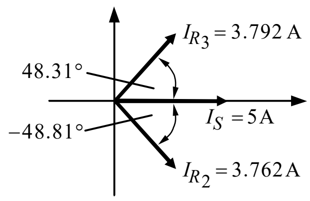
הערה: נוסיף כי אין לומר שמכיוון שהיגבי הסליל והקבל אינם שווים אז המעגל אינו בתהודה. התנאי שההיגבים יהיו שווים קיים רק בתהודה טורית, או בתהודה במעגל מקבילי **אידיאלי**. כאן מדובר במעגל מקבילי **מעשי**, ובו התנאי לתהודה הינו, שהחלק המדומה של העכבה יהיה אפס. תנאי זה נכון תמיד לכל סוגי התהודה (הרחבה על נידון זה של מעגלי תהודה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים").

ג.　ניעזר בכלל מחלק הזרם ונחשב את הזרמים בענפים:

$$\bar{I}_{R_2} = \frac{\bar{I}_S \cdot (R_\Theta - jX_C)}{R_2 + jX_L + R_\Theta - jX_C} = \frac{5 \cdot (8 - j16)}{15 + j10 + 8 - j16} = 3.762\angle -48.81°(\text{A})$$

$$\bar{I}_{R_3} = \bar{I}_S - \bar{I}_{R_2} = 5 - 3.762\angle -48.81° = 3.792\angle 48.31°(\text{A})$$

נשרטט את דיארגמת הזרמים של המעגל:



ד. ניעזר בתנאי התהודה המתאים למעגל זה, ונחשב את R_Θ:

$$\frac{X_L}{{R_2}^2 + {X_L}^2} = \frac{X_C}{{R_\Theta}^2 + {X_C}^2}$$

$$\frac{10}{15^2 + 10^2} = \frac{16}{{R_\Theta}^2 + 16^2}$$

$$R_\Theta = 16.248(\Omega)$$

נתון שמקדם הטמפרטורה הוא $\alpha = 0.01(1/{}^\circ\text{C})$. ניעזר בנוסחה לתלות ההתנגדות בטמפרטורה ונחשב את הטמפרטורה שבה נמצא R_Θ:

$$R_{(T)} = R_{T_0}\left[1 + \alpha_{T_0}\left(T - T_0\right)\right]$$

$$16.248 = 8 \cdot \left[1 + 0.01\left(T - 20^\circ\right)\right]$$

$$T = 123.1({}^\circ\text{C})$$

שאלה 5

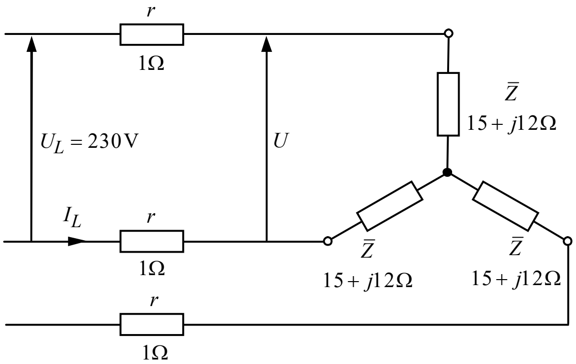
א. כל אחת מהעכבות שבעומס מורכבת מנגד $R=15\Omega$ וסליל $X_L=12\Omega$ המחוברים בטור (הנגד r מוגדר בשאלה כהתנגדות התיל המוליך, ולכן אינו נחשב לחלק מהעומס). מכאן:

$$\bar{Z}=R+jX_L=15+j12(\Omega)=19.209\angle 38.65°(\Omega)$$

בשאלה ביקשו לחשב את **הגודל** של העכבה. הגודל הוא הערך המוחלט של $\bar{Z}$. כלומר:

$$Z=19.209(\Omega)$$

ב.



נקדים ונציין כי המתח U_{ph} מוגדר בשאלה זו כמתח U_Z על **העכבות** (מה שאין כן בשאלות ובספרים רבים שבהם U_{ph} הוא מתח **המקורות**. מכל מקום, במקרה זה שבו גם המקורות בחיבור כוכב כפי שנאמר בתחילת השאלה, מתח המקורות זהה למתח העכבות כידוע).

המתח הנתון U_L נקרא מתח הקו. ניעזר בקשר הבא הנתון בנוסחאון, ונחשב את U_{ph}:

$$U_L=U_{ph}\cdot\sqrt{3} \quad\Rightarrow$$

$$U_{ph}=\frac{U_L}{\sqrt{3}}=\frac{230}{\sqrt{3}}=132.790(\text{V})$$

כעת יש לשים לב, כי המתח U_{ph} שחישבנו מוגדר בנוסחה האחרונה כמתח על כל אחת מעכבות העומס, זאת כאשר **אין** לתיל התנגדות r. במקרה שלנו בו ישנה התנגדות r, נוכל להתייחס אליה כאילו חיברנו אותה בטור עם העכבה Z, ואז המתח U_{ph} שמצאנו הינו למעשה המתח הכולל של $Z+r$. בשאלה התבקשנו לחשב את המתח של כל עכבה בפני עצמה, ללא r. נוכל לחשב מתח זה בעזרת כלל מחלק המתח:

$$\bar{U}_{ph_{(Z)}}=\frac{U_{ph}\cdot Z}{Z+r}=\frac{132.790\cdot(15+j12)}{15+j12+1}=127.541\angle 1.78°(\text{V})$$

כמו בסעיף א', התבקשנו לחשב את "הגודל" של המתח בלבד. מכאן:

$$U_{ph_{(Z)}}=127.541(\text{V})$$

כידוע במעגלים מסוג זה, **גודל** המתח שווה בכל העכבות (אולם הזוויות שונות, חישוב הזוויות המדויק אפשרי בשאלות בהן נתונים מתחי המקורות עם הזוויות שלהם).

ג. הזרם I_L הוא הזרם העובר דרך כל אחת מהעכבות. את **גודל** המתח על כל עכבה חישבנו בסעיף הקודם. את **גודל** העכבה חישבנו בסעיף א'. נוכל לחשב את **הגודל** של I_L בעזרת חוק אום:

$$I_L = \frac{U_{ph_{(Z)}}}{Z} = \frac{127.541}{19.209} = 6.639(\mathrm{A})$$

ד. המתח השלוב (הנקרא גם מתח הקו) בסוג מעגל זה, תמיד גדול פי $\sqrt{3}$ ממתח העכבה, וכפי שראינו זאת בסעיף ב', אלא ששם עסקנו במתח שלוב **כללי**, כולל ההתנגדות r, ואילו כאן אנו עוסקים במתח שלוב "פרטי" של העכבות. ניעזר במתח העכבות שחישבנו בסעיף ב', ונחשב את גודל המתח השלוב:

$$U = U_{ph_{(Z)}} \cdot \sqrt{3} = 127.541 \cdot \sqrt{3} = 220.907(\mathrm{V})$$

שאלה 6

א. נרכז נתונים:

$$N=350$$

$$\ell=16(\mathrm{cm})=16\times10^{-2}(\mathrm{m})$$

$$A=20\left(\mathrm{cm}^2\right)=20\times10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right)$$

נתון שהשטף בליבה הוא $\phi=4\times10^{-4}(\mathrm{Wb})$. נחשב את B:

$$B=\frac{\phi}{A}=\frac{4\times10^{-4}}{20\times10^{-4}}=0.2(\mathrm{T})$$

נתון בשאלה הקשר $H=208\cdot e^{-B}$. ניעזר בקשר זה ונחשב את H:

$$H=208\cdot e^{-B}=208\cdot e^{-0.2}=170.295\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$$

ניעזר בנוסחה $B=\mu_r\mu_0H$ ונחשב את μ_r:

$$\mu_r=\frac{B}{\mu_0H}=\frac{0.2}{4\pi10^{-7}\cdot170.295}=934.578$$

נחשב את R_m:

$$R_m=\frac{\ell}{\mu_0\mu_rA}=\frac{16\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot934.578\cdot20\times10^{-4}}=68.118\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

נחשב את הזרם המבוקש בעזרת הנוסחה הבאה:

$$\phi=\frac{F_{mm}}{R_{m_\mathrm{T}}}=\frac{NI}{R_{m_\mathrm{T}}}\quad\Rightarrow$$

$$I=\frac{\phi\cdot R_{m_\mathrm{T}}}{N}=\frac{4\times10^{-4}\cdot68.118\times10^3}{350}=0.077(\mathrm{A})=77.849(\mathrm{mA})$$

ב.

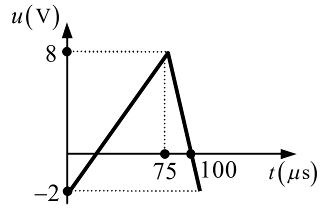
$$\mu=\mu_0\mu_r=4\pi10^{-7}\cdot934.578=1.174\times10^{-3}\left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right)$$

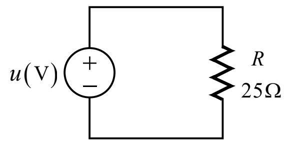
ג. חושב לעיל:

$$\mu_r=934.578$$

שאלה 7

א.





בצד ימין של האיור מובא המעגל החשמלי הנתון בשאלה. בצד שמאל של האיור מובא המחזור הראשון של אות המתח. ניתן לראות שזמן המחזור של האות הוא:

$$T=100(\mu\mathrm{s})$$

נחשב את תדר האות:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{100\mu}=10000(\mathrm{Hz})=10(\mathrm{kHz})$$

ב. כל מחזור מורכב משני קטעים – שני קווים ישרים. נמצא את משוואת הישר של כל קטע. לשם הנוחות, אנו נעבוד עם המחזור הראשון אותו תיארנו לעיל.

<u>קטע 1</u> (בין 0 ל- 75μ):

שיפוע הישר נתון על ידי:

$$a_1=\frac{\Delta U}{\Delta t}=\frac{8-(-2)}{75\mu-0}=133.333\times10^3\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}\right)$$

ניתן לראות באיור לעיל, שנקודת החיתוך b_1 של הישר עם הציר האנכי היא -2. נרכיב את משוואת הישר:

$$u_1(t)=133.333\times10^3t-2\ (\mathrm{V})$$

<u>קטע 2</u> (בין 75μ ל- 100μ):

מדובר בישר יורד (שיפוע שלילי). נחשב את גודל השיפוע:

$$a_2=\frac{\Delta U}{\Delta t}=\frac{-2-8}{100\mu-75\mu}=-400\times10^3\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}\right)$$

עלינו למצוא את נקודת החיתוך b_2 של קו זה עם הציר האנכי. נקודה זו אינה נתונה באיור. נוכל לחשבה על ידי הצבת נתונים במשוואת הקו הישר הכללית:

$$y=ax+b$$

זוהי הצורה הכללית של המשוואה הלקוחה מתחום ההנדסה. תחילה "נתאים" משוואה זו לנידון בו אנו עוסקים. בשאלה שלנו, ציר ה-y הוא מתח $u(t)$, וציר ה-x הוא זמן t. מכאן:

$$u(t)=at+b$$

נציב כעת את השיפוע אותו חישבנו. בנוסף נציב שיעורי נקודה אחת שעל הישר. נבחר באופן שרירותי את הנקודה ששיעוריה $U=8\mathrm{V}$, $t=75\mu\mathrm{s}$. מכאן:

$$8=\left(-400\times10^3\right)(75\mu)+b_2$$

$$b_2=38(\mathrm{V})$$

כעת לאחר שיש בידנו את a_2 ו- b_2 נוכל להרכיב את משוואת הישר השני:

$$u_2(t) = -400\times10^3 t + 38 \ (\text{V})$$

נציב כעת את משוואות שני הקטעים שקיבלנו בנוסחה לחישוב ערך ממוצע:

$$U_{\text{av}} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\left[u(t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{75\mu}\left[u_1(t)\right]dt + \int_{75\mu}^{100\mu}\left[u_2(t)\right]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{100\mu}\left(\int_0^{75\mu}\left[133.333\times10^3 t - 2\right]dt + \int_{75\mu}^{100\mu}\left[-400\times10^3 t + 38\right]dt\right) = 3(\text{V})$$

ג. נציב את משוואות שני הקטעים שקיבלנו בנוסחה לחישוב ערך יעיל:

$$U_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\left[u(t)\right]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{75\mu}\left[u_1(t)\right]^2 dt + \int_{75\mu}^{100\mu}\left[u_2(t)\right]^2 dt\right)} =$$

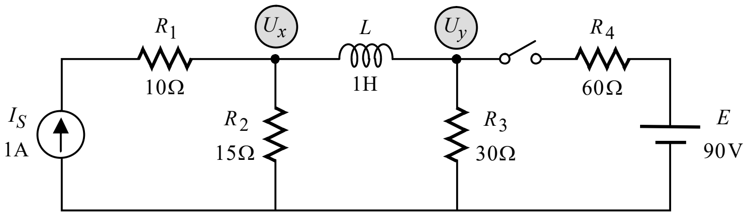
$$= \sqrt{\frac{1}{100\mu}\left(\int_0^{75\mu}\left[133.333\times10^3 t - 2\right]^2 dt + \int_{75\mu}^{100\mu}\left[-400\times10^3 t + 38\right]^2 dt\right)} = 4.163(\text{V})$$

ד. את **ההספק הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת **הערך היעיל** (של המתח או של הזרם). מכאן:

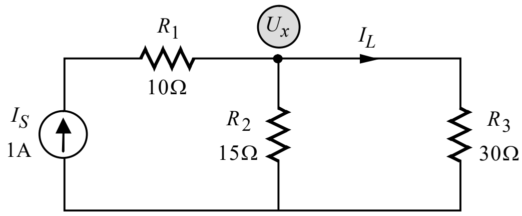
$$P_R = \frac{{U_{\text{rms}}}^2}{R} = \frac{4.163^2}{25} = 0.693(\text{W})$$

שאלה 8

א.



1. נתון שהמפסק פתוח, וכל תופעות המעבר חלפו. במצב המתמיד הסליל שקול לקֶצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



$$I_L = I_{R_3} = \frac{I_S \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 15}{15+30} = 0.333(\text{A})$$

2.

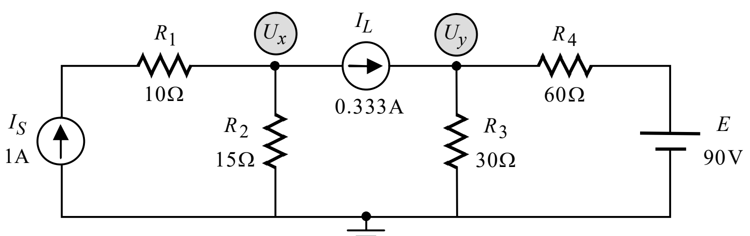
$$U_x = U_{R_3} = I_{R_3} \cdot R_3 = 0.333 \cdot 30 = 10(\text{V})$$

3.

$$W_L = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1 \cdot 0.333^2}{2} = 0.055(\text{J}) = 55.55(\text{mJ})$$

ב.

1. בסעיף זה התבקשנו לנתח את המעגל מיד לאחר סגירת המפסק. למרות שמדובר במצב התחלתי, מכל מקום מאחר והסליל טעון הוא אינו קצר. לסליל יש תכונה שהוא שומר על רציפות הזרם, בגודל ובכיוון שהיו בו לפני השינוי. לכן במצב הנוכחי הסליל שקול למקור זרם, שערכו וכיוונו הם כפי שקיבלנו בסעיף א'. נשרטט מעגל שקול:



נפתור בעזרת שיטת מתחי הצמתים. מאחר ובין שני הצמתים יש מקור זרם, בכל משוואה יהיה רק נעלם אחד, כך שניתן יהיה לפתור כל משוואה בפני עצמה.

צומת x:

$$-I_S + I_{R_2} + I_L = 0$$

$$-I_S + \frac{U_x}{R_2} + I_L = 0$$

$$-1 + \frac{U_x}{15} + 0.333 = 0$$

$$U_x = 10(\text{V})$$

צומת y:

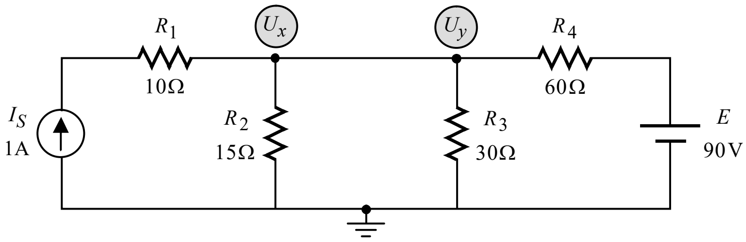
$$-I_L + I_{R_3} + I_{R_4} = 0$$

$$-I_L + \frac{U_y}{R_3} + \frac{U_y - E}{R_4} = 0$$

$$-0.333 + \frac{U_y}{30} + \frac{U_y - 90}{60} = 0$$

$$U_y = 36.666(\text{V})$$

2. במצב המתמיד הסליל שקול תמיד לקצר. נשרטט את המעגל המתקבל:



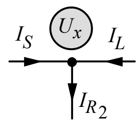
מאחר ויש קצר בין x ל-y, שני צמתים אלה הינם למעשה אותו הצומת מבחינה חשמלית. נוכל לפתור בעזרת משפט מילמן:

$$U_x = U_y = \frac{I_S + \frac{E}{R_4}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1 + \frac{90}{60}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}} = 21.428(\text{V})$$

3.

$$I_{R_2} = \frac{U_x}{R_2} = \frac{21.428}{15} = 1.428(\text{A})$$

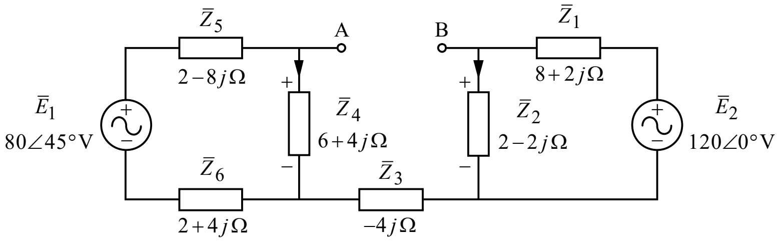
נרשום את חוק הזרמים לצומת x ונקבל:



$$I_L = I_{R_2} - I_S = 1.428 - 1 = 0.428(\text{A})$$

שאלה 9

א. **חישוב מתח תבנין:**



שני חלקי המעגל מתפקדים כשני מעגלים טוריים נפרדים. כיוון הזרם בכל מעגל סומן באיור. מכך נגזרו כיווני קוטביות המתחים של $\bar{Z}_2$ ו- $\bar{Z}_4$ (בעכבה, כמו בנגד, נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן "פלוס"). ניעזר בכלל מחלק המתח ונחשב את המתח של שתי עכבות אלו:

$$\bar{U}_{Z_2}=\frac{\bar{E}_2\cdot\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}=\frac{(120\angle 0°)(2-2j)}{8+2j+2-2j}=33.941\angle -45°(\text{V})$$

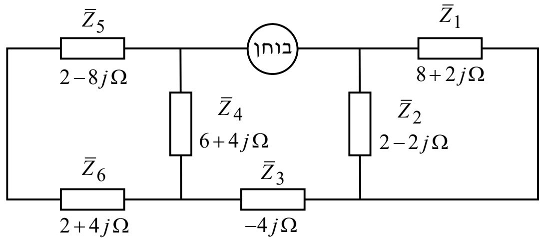
$$\bar{U}_{Z_4}=\frac{\bar{E}_1\cdot\bar{Z}_4}{\bar{Z}_4+\bar{Z}_{5-6}}=\frac{(80\angle 45°)(6+4j)}{6+4j+2-8j+2+4j}=57.688\angle 78.690°(\text{V})$$

מכאן:

$$\bar{E}_{\text{Th}}=\bar{U}_{\text{AB}}=+\bar{U}_{Z_4}-\bar{U}_{Z_2}=57.688\angle 78.690°-33.941\angle -45°=81.561\angle 98.94°(\text{V})$$

חישוב עכבת תבנין:

נקצר את מקורות המתח, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:

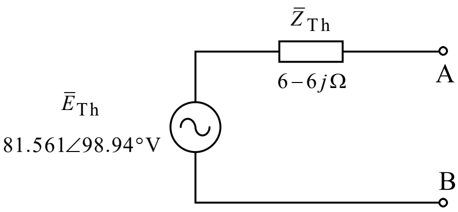


$$\bar{Z}_{1-2}=\left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{8+2j}+\frac{1}{2-2j}\right)^{-1}=2-1.2j(\Omega)$$

$$\bar{Z}_{4-6}=\left(\frac{1}{\bar{Z}_4}+\frac{1}{\bar{Z}_5+\bar{Z}_6}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{6+4j}+\frac{1}{2-8j+2+4j}\right)^{-1}=4-0.8j(\Omega)$$

$$\bar{Z}_{\text{Th}}=\bar{Z}_{1-2}+\bar{Z}_3+\bar{Z}_{4-6}=2-1.2j-4j+4-0.8j=6-6j(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ב. במקרה בו עכבת העומס $\bar{Z}_L$ היא מספר מרוכב, התנאי להעברת הספק מקסימלי הוא:

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{\text{Th}}^* = 6+6j(\Omega)$$

ג. נחבר את $\bar{Z}_L$ למעגל תבנין שקיבלנו ונחשב את ההספקים:

$$\bar{I}_{Z_L} = \frac{\bar{E}_{\text{Th}}}{\bar{Z}_{\text{Th}}+\bar{Z}_L} = \frac{81.561\angle 98.94°}{6-6j+6+6j} = 6.796\angle 98.94°(\text{A})$$

$$\bar{U}_{Z_L} = \bar{I}_{Z_L} \cdot \bar{Z}_L = (6.796\angle 98.94°)(6+6j) = 57.672\angle 143.94°(\text{V})$$

$$\bar{S}_{\bar{Z}_L} = \bar{U}_{Z_L} \cdot \bar{I}_{Z_L}^* = (57.672\angle 143.94°)(6.796\angle -98.94°) =$$

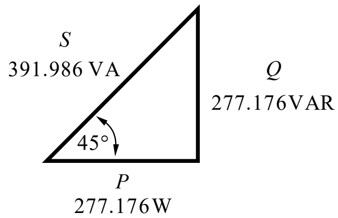
$$= 277.176+277.176j = 391.986\angle 45° \ (\text{VA})$$

מכאן:

$$P = 277.176(\text{W})$$

$$Q = 277.176(\text{VAR})$$

$$S = 391.986(\text{VA})$$



ד. במקרה בו העומס R_L הוא אוהמי טהור, התנאי להעברת הספק מקסימלי הוא:

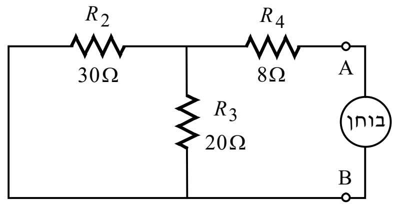
$$R_L = |\bar{Z}_{\text{Th}}| = 8.485(\Omega)$$

שאלה 10

הערה: שאלה זו הופיעה כבר באביב 2021 מועד א', שאלה 2. נפתור בדרך דומה לדרך שפתרנו שם.

א. **חישוב התנגדות תבנין:**

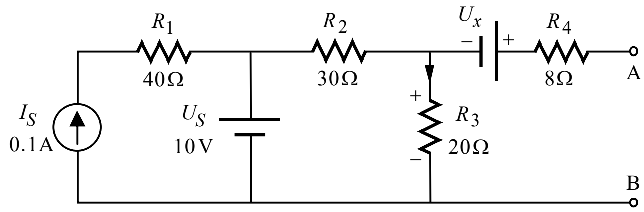
נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחן בין A ל-B, ונשרטט את המעגל המתקבל:



$$R_{\text{Th}} = R_2 \parallel R_3 + R_4 = \left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)^{-1} + 8 = 20(\Omega)$$

ב. **חישוב מתח תבנין:**

נשרטט את המעגל:



מתח תבנין הוא המתח בין A ל-B. נחשב מתח זה בעזרת מסלול מתחים העובר דרך R_4, U_x, ו-R_3. אנו נחשב את E_{Th} כרגיל, אלא שאת U_x נשאיר כנעלם.

נבאר כיצד קבענו את קוטביות המתח על R_3: מכיוון שלא מתפצל זרם לכיוונו של R_4, אותו הזרם זורם דרך R_2 ו-R_3. במילים אחרות הם מחוברים ביניהם בטור. שני נגדים אלה מחוברים במקביל למקור המתח U_S. קוטביות המתח של U_S מאלצת זרם בכיוון מטה דרך R_3. מכאן נגזרה קוטביות המתח של נגד זה.

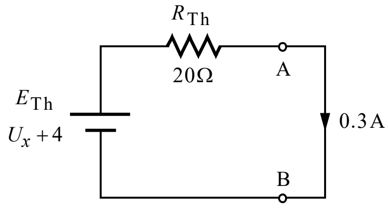
ניעזר בכלל מחלק המתח ונחשב את המתח על R_3:

$$U_{R_3} = \frac{U_S \cdot R_3}{R_2+R_3} = \frac{10\cdot 20}{30+20} = 4(\text{V})$$

המתח על R_4 הוא אפס. נמצא ביטוי עבור E_{Th}:

$$E_{\text{Th}} = U_{\text{AB}} = +U_x + U_{R_3} = U_x + 4$$

ג. מכיוון שחוט הקצר מחובר בין A ל-B ניתן יהיה להיעזר במעגל תבנין. נשרטט את המעגל ונציין על גביו את הידוע לנו:



מכאן נוכל לחשב בקלות את U_x:

$$E_{Th}=I\cdot R_{Th}$$

$$U_x+4=I\cdot R_{Th}$$

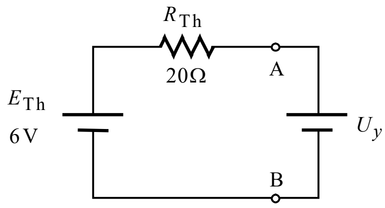
$$U_x+4=0.3\cdot 20$$

$$U_x=2(V)$$

ד. כעת לאחר שחישבנו את U_x, נוכל לחשב את ערכו של E_{Th}:

$$E_{Th}=U_x+4=2+4=6(V)$$

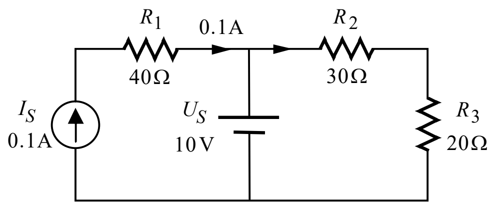
נסמן את המקור האידיאלי ב- U_y, נחבר אותו למעגל תבנין, ונשרטט את המעגל המתקבל:



מהשרטוט עולה בבירור, שעל מנת שלא יזרום זרם דרך U_y, עליו להיות בכיוון המתואר, וערכו צריך להיות שווה ל- E_{Th}. ובניסוח מתמטי:

$$U_y=E_{Th}=6(V)$$

ה. נשרטט את חלק המעגל ה"פעיל" ונציין על גביו את הידוע לנו:



כיוונו של הזרם דרך R_2 ו- R_3 נקבע בהתאם לנאמר לעיל סעיף ב'. נחשב את ערכו של זרם זה:

$$I_{R_{2-3}}=\frac{U_S}{R_{2-3}}=\frac{10}{30+20}=0.2(A)$$

על פי חוק הזרמים של קירכהוף מתקבל:

$$I_{U_S}=I_{R_{2-3}}-I_S=0.2-0.1=0.1(A)$$

נחשב את ההספק של U_S:

$$P_{U_S}=U_S\cdot I_{U_S}=10\cdot 0.1=1(W)$$