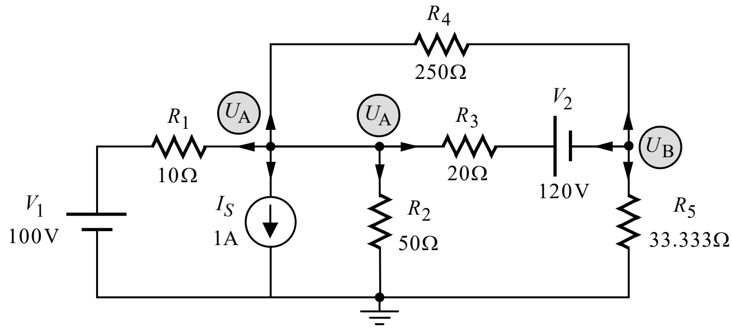
פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2024 מועד ב׳

שאלה 1

א. נפתור במתחי צמתים. נשרטט את המעגל:



הנחנו כתמיד שכל הזרמים יוצאים מכל צומת וצומת. ניתן לשים לב שהמתח U_A מסומן מעל שתי נקודות במעגל, שכן שתי נקודות אלו הן למעשה אותו הצומת מבחינה חשמלית, שהרי בינהן מפריד רק חוט קצר חסר התנגדות. נרשום את משוואות הצמתים.

<u>צומת A</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת A:

שלב א׳:
$$(A)\ I_{R_1}+I_S+I_{R_2}+I_{R_3}+I_{R_4}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב׳:
$$(A)\ \frac{U_A-V_1}{R_1}+I_S+\frac{U_A-0}{R_2}+\frac{U_A-V_2-U_B}{R_3}+\frac{U_A-U_B}{R_4}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳:
$$(A)\ \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_A-\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_B=\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_3}-I_S$$

נציב ערכים:

שלב ד׳:
$$(A)\ \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{250}\right)U_A-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{250}\right)U_B=\frac{100}{10}+\frac{120}{20}-1$$

<u>צומת B</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת B:

שלב א׳:
$$(B)\ I'_{R_3}+I'_{R_4}+I_{R_5}=0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב׳:
$$(B)\ \frac{U_B-(-V_2)-U_A}{R_3}+\frac{U_B-U_A}{R_4}+\frac{U_B-0}{R_5}=0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳:
$$(B)\ -\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_A+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_B=-\frac{V_2}{R_3}$$

נציב ערכים:

שלב ד': $$(\mathrm{B})\ -\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{250}\right)U_{\mathrm{A}}+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{250}+\frac{1}{33.333}\right)U_{\mathrm{B}}=-\frac{120}{20}$$

<u>לסיכום:</u>

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}(\mathrm{A})\ \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{250}\right)U_{\mathrm{A}}-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{250}\right)U_{\mathrm{B}}=\frac{100}{10}+\frac{120}{20}-1\\(\mathrm{B})\ -\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{250}\right)U_{\mathrm{A}}+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{250}+\frac{1}{33.333}\right)U_{\mathrm{B}}=-\frac{120}{20}\end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן:

$$U_{\mathrm{A}}=80(\mathrm{V})$$

$$U_{\mathrm{B}}=-20(\mathrm{V})$$

ב. **המקור V_1:**

$$I_{V_1}=I_{R_1}=\frac{U_{\mathrm{A}}-V_1}{R_1}=\frac{80-100}{10}=-2(\mathrm{A})$$

ביטוי זרם זה של I_{R_1} נלקח ממשוואת צומת A, שלגביה הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. קיבלנו תוצאה שלילית, מה שאומר שכיוונו של הזרם הפוך להנחה ההתחלתית – כלומר **הוא נכנס אל צומת A**. נמצא שהזרם דרך V_1 יוצא מהדק החיובי שלו, ולכן מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק של מקור זה:

$$P_{V_1}=V_1\cdot I_{V_1}=100\cdot 2=200(\mathrm{W})$$

המקור V_2:

$$I_{V_2}=I_{R_3}=\frac{U_{\mathrm{B}}-(-V_2)-U_{\mathrm{A}}}{R_3}=\frac{-20-(-120)-80}{20}=1(\mathrm{A})$$

ביטוי זרם זה של I_{R_3} נלקח ממשוואת צומת B, שלגביה הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. קיבלנו תוצאה חיובית, מה שאומר שכיוונו של הזרם הוא כהנחה ההתחלתית – כלומר **הוא יוצא מצומת B**. נמצא שהזרם דרך V_2 יוצא מהדק החיובי שלו, ולכן מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק של מקור זה:

$$P_{V_2}=V_2\cdot I_{V_2}=120\cdot 1=120(\mathrm{W})$$

המקור I_S:

$$U_{I_S}=U_{\mathrm{A}}=80(\mathrm{V})$$

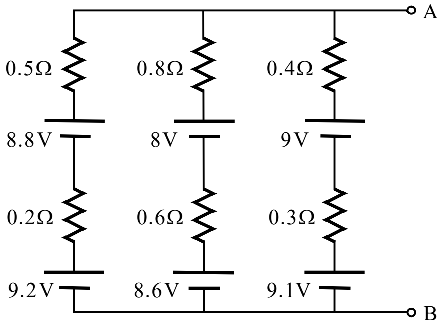
הפוטנציאל בראש החץ של מקור הזרם (אדמה) **נמוך** מהפוטנציאל בבסיס החץ ($U_{\mathrm{A}}=80\mathrm{V}$), ולכן מקור זה **צרכן**. נחשב את ההספק של מקור זה:

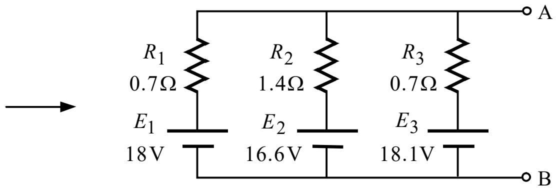
$$P_{I_S}=U_{I_S}\cdot I_S=80\cdot 1=80(\mathrm{W})$$

שאלה 2

שאלה זו הופיעה כבר בקיץ 2023 מועד א׳, שאלה 2. נפתור בדרך דומה לדרך בה פתרנו שם.

א.





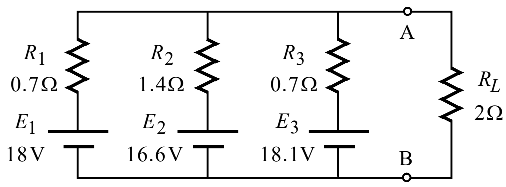
המעגל שבצד שמאל הוא המעגל הנתון בשאלה (כאשר המפסק פתוח). חיברנו בין המקורות ובין הנגדים שבכל ענף, וקיבלנו את המעגל השקול המופיע בצד ימין של האיור. על מנת שמהלך הפתרון יהיה מובן די הצורך, הענקנו סימונים למקורות ולנגדים השקולים שבכל ענף.

בסעיף זה ביקשו לחשב את המתח על הדקי ה״סוללה״ כאשר המפסק פתוח. כוונת השאלה שכל הששה תאים נקראים יחד ״סוללה״. המתח המבוקש הוא אם כן המתח בין A ל-B.

נחשב בעזרת משפט מילמן:

$$U_{AB}=\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}=\frac{\frac{18}{0.7}+\frac{16.6}{1.4}+\frac{18.1}{0.7}}{\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}}=17.76(\mathrm{V})$$

ב. נשרטט מעגל שקול:

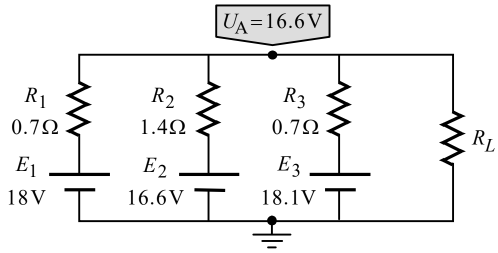


המתח בין A ל-B כעת אינו המתח שחושב בסעיף הקודם, שהרי יש כעת נגד נוסף במעגל. ניעזר שוב במשפט מילמן ונחשב את המתח והזרם של R_L :

$$U_{R_L}=U_{AB}=\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_L}}=\frac{\frac{18}{0.7}+\frac{16.6}{1.4}+\frac{18.1}{0.7}}{\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}+\frac{1}{2}}=15.578(\mathrm{V})$$

$$I_{R_L}=\frac{U_{R_L}}{R_L}=\frac{15.578}{2}=7.789(\mathrm{A})$$

ג. נשרטט מעגל שקול ולאחר מכן נבאר:



ביאור: בשאלה ביקשו שכל המקורות יפעלו כספקים. על מנת שמצב זה יתרחש, המתח U_A צריך להיות קטן מהמקור הכי קטן – E_2. כלומר, המתח U_A צריך להיות **קטן** מ- 16.6V. במצב זה, מכיון ש- U_A קטן מכל המקורות, הזרמים בכל המקורות יזרמו כלפי מעלה (שכן זרם חשמלי זורם מהפוטנציאל הגבוה לנמוך). נמצא שכל המקורות במצב זה יפעלו כספקים כנדרש בשאלה, שהרי הזרם יוצא מההדק החיובי של כל מקור.

לצורך הפתרון קבענו ש- U_A שווה ל- 16.6V בדיוק, ואת הנגד R_L השארנו כנעלם. נפתור שוב בעזרת משפט מילמן (נציין כי המתח U_A הוא למעשה המתח U_{AB} אותו חישבנו בסעיפים הקודמים, אלא שכעת לשם ההסבר הצגנו מתח זה כ- U_A ולמטה חיברנו אדמה. לפיכך הפעלת משפט מילמן תהא זהה בדיוק לסעיף הקודם, אלא שכעת R_L הוא הנעלם):

$$U_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_L}}$$

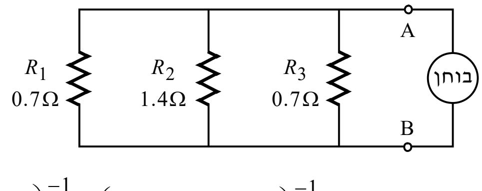
$$16.6 = \frac{\frac{18}{0.7}+\frac{16.6}{1.4}+\frac{18.1}{0.7}}{\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}+\frac{1}{R_L}}$$

$$R_L = 4.006(\Omega)$$

הערך שקיבלנו עבור R_L, מתבסס על ההנחה שהנחנו כי המתח U_A הוא **בדיוק** 16.6V. אולם אנו הרי רוצים שהמתח U_A יהא **קטן** מ- 16.6V (וכך אפילו E_2 יהיה ספק). לשם כך R_L צריך להיות **קטן** מהערך שקיבלנו. ובניסוח מתמטי:

$$R_L < 4.006(\Omega)$$

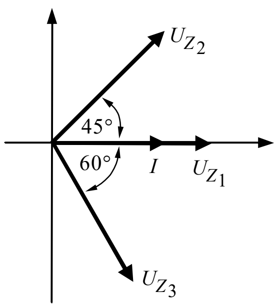
ד. על מנת לקבל העברת "אנרגיה" מרבית, או העברת "הספק" מרבית, הנגד R_L צריך להיות שווה להתנגדות תבנין הנראית מבין הדקיו. לשם חישוב התנגדות תבנין, נקצר את מקורות המתח, ונניח מקור בוחן במקום R_L. מכאן:

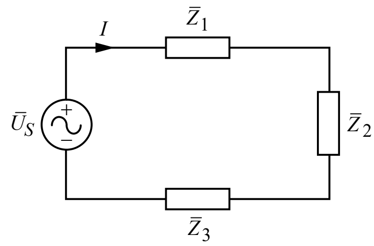


$$R_L = R_{Th} = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{0.7}\right)^{-1} = 0.28(\Omega)$$

שאלה 3

א.





כפי שניתן לראות בדיאגרמה הפאזורית, **הזרם במעגל הוא בזווית אפס**. מכאן:

- למתח $\bar{U}_{Z_1}$ יש גם כן זווית אפס. נמצא שלמתח ולזרם של $\bar{Z}_1$ יש את אותה הזווית (אפס). מצב זה מתקיים רק בנגד. מכאן ש- $\bar{Z}_1$ היא עכבה בעלת **אופי אוהמי טהור**.
- למתח $\bar{U}_{Z_2}$ יש זווית של $45°$. נמצא שהמתח של $\bar{Z}_2$ מקדים ב- $45°$ את הזרם דרכה. מכאן שהעכבה $\bar{Z}_2$ היא בעלת **אופי השראִי**.
- למתח $\bar{U}_{Z_3}$ יש זווית של $-60°$ (הסימן השלילי נובע מכך שזווית זו מתקבלת מסיבוב נגד כיוון השעון מציר ה-X). נמצא שהזרם של $\bar{Z}_3$ מקדים ב- $60°$ את המתח שעליה. מכאן שהעכבה $\bar{Z}_3$ היא בעלת **אופי קיבולי**.

הרחבה אודות הייצוג הגרפי של מתחים וזרמים במעגלי זרם חילופין ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי זרם חילופין.

ב. בסעיף זה נתונים **הגדלים** של המתחים ושל הזרם במעגל. בדיאגרמה לעיל נתונות **הזוויות** של גדלים אלה. נצמיד לכל גודל את הזווית שלו ונקבל:

$$\bar{U}_{Z_1}=10\angle 0°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_2}=12\angle 45°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_3}=18\angle -60°(\mathrm{V})$$

$$I=2\angle 0°(\mathrm{A})$$

נחשב את העכבות בעזרת חוק אום:

$$\bar{Z}_1=\frac{\bar{U}_{Z_1}}{I}=\frac{10\angle 0°}{2}=5(\Omega)$$

$$\bar{Z}_2=\frac{\bar{U}_{Z_2}}{I}=\frac{12\angle 45°}{2}=4.242+4.242j(\Omega)$$

$$\bar{Z}_3=\frac{\bar{U}_{Z_3}}{I}=\frac{18\angle -60°}{2}=4.5-7.794j(\Omega)$$

נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2+\bar{Z}_3=5+4.242+4.242j+4.5-7.794j=13.742-3.551j(\Omega)$$

החלק המדומה של העכבה יצא שלילי, ומכאן שלמעגל יש **אופי קיבולי**.

ג.

$$\overline{U}_S=\overline{I}\cdot\overline{Z}_{\mathrm{T}}=2(13.742-3.551j)=28.388\angle-14.49°(\mathrm{V})$$

ההספק **הפעיל** הוא ההספק של החלק הממשי של העכבה השקולה. מכאן:

$$P_{\mathrm{T}}=I^2\cdot R_{(Z_{\mathrm{T}})}=2^2\cdot13.742=54.97(\mathrm{W})$$

ד. העכבה השקולה הינה כאמור:

$$\overline{Z}_{\mathrm{T}}=13.742-3.551j(\Omega)$$

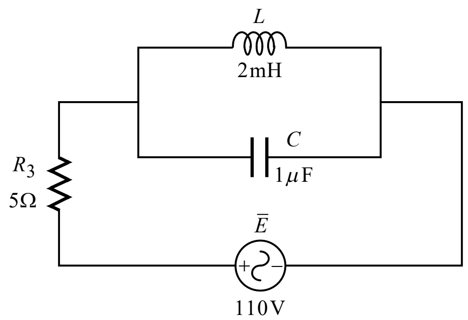
מכאן שעל מנת שלכעה יהיה אופי התנגדותי טהור (ללא j), יש לחבר סליל שהיגבו $X_L=3.551\Omega$ בטור לעכבה השקולה. נתון בסעיף זה $f=500\mathrm{Hz}$. נחשב את ההשראות של הסליל כנדרש בשאלה:

$$X_L=2\pi fL \quad \Rightarrow$$

$$L=\frac{X_L}{2\pi f}=\frac{3.551}{2\pi\cdot500}=1.130(\mathrm{mH})$$

שאלה 4

א. כאשר המפסקים סגורים הנגדים מקוצרים. נשרטט את המעגל המתקבל:

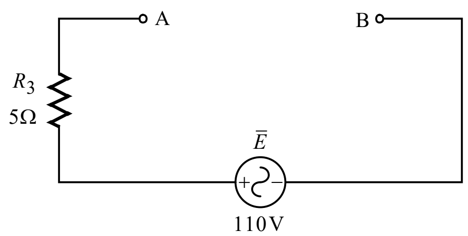


זרם מזערי יזרום במצב של תהודה מקבילית בין הסליל והקבל. בסעיף זה מדובר על תהודה במעגל **מקבילי אידיאלי**. בסוג תהודה זה הסליל והקבל שקולים לנֶתק. במצב זה אין למעשה מעגל סגור, והזרם במעגל יהיה המזערי ביותר האפשרי – אפס. נחשב את תדר התהודה בעזרת הנוסחה המתאימה לסוג מעגל תהודה זה:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{2\times10^{-3}\cdot1\times10^{-6}}}=22360.679\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{22360.679}{2\pi}=3558.812(\text{Hz})$$

ב. כאמור הסליל והקבל שקולים לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:

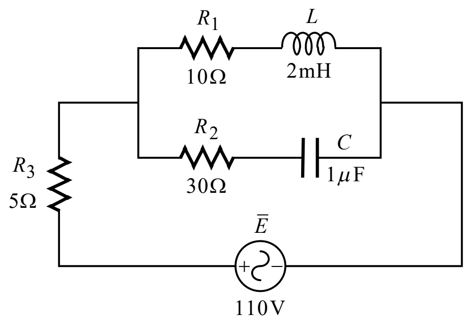


במצב זה הזרם במעגל הוא אפס. המתח על הקבל המתקבל ממסלול מתחים בין A ל-B הוא מתח המקור. ובניסוח מתמטי:

$$\bar{I}=0(\text{A})$$

$$\bar{U}_C=\bar{E}=110(\text{V})$$

ג. כעת שני המפסקים פתוחים, כך שהנגדים לא מקוצרים יותר. נשרטט את המעגל המתקבל:



מעגל בעל "אופי אוהמי טהור" מתקבל במצב של תהודה. כעת מדובר על תהודה במעגל **מקבילי מעשי**. נחשב את תדר התהודה בעזרת הנוסחה המתאימה לסוג מעגל תהודה זה:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{1\times10^{-6}}} = 44.721(\Omega)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{R_0^{\,2} - R_L}{R_0^{\,2} - R_C}} = \frac{1}{\sqrt{2\times10^{-3}\cdot1\times10^{-6}}}\cdot\sqrt{\frac{44.721^2 - 10^2}{44.721^2 - 30^2}} = 29387.690\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{29387.690}{2\pi} = 4677.19(\text{Hz})$$

ד. יש לשים לב שבסוג תהודה זה הסליל והקבל אינם קצר ואינם נתק, וההיגב שלהם גם לא חייב להיות זהה. מכל מקום, אם נקפיד על חישוב מדויק, נקבל כי העכבה השקולה היא מספר ממשי טהור, ללא j (הסבר מורחב על סוגי התהודה השונים והמאפיינים שלהם, ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים"). נחשב את העכבה השקולה של המעגל:

$$X_L = \omega_0 L = 29387.690\cdot2\times10^{-3} = 58.775(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{29387.690\cdot1\times10^{-6}} = 34.027(\Omega)$$

$$\bar{Z}_{\text{T}} = \left(\frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C}\right)^{-1} + R_3 = \left(\frac{1}{10 + j58.775} + \frac{1}{30 - j34.027}\right)^{-1} + 5 = 62.5(\Omega)$$

נחשב את הזרם במעגל:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{\text{T}}} = \frac{110}{62.5} = 1.76(\text{A})$$

ה. בסעיף זה רק R_2 מקוצר. כלומר מדובר בקבל טהור, ללא התנגדות בטור אליו. נחשב את תדר התהודה הזוויתי בעזרת הנוסחה המתאימה לסוג מעגל תהודה זה:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^{\,2}}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\times10^{-3}\cdot1\times10^{-6}} - \frac{10^2}{\left(2\times10^{-3}\right)^2}} = 21794.494\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

שאלה 5

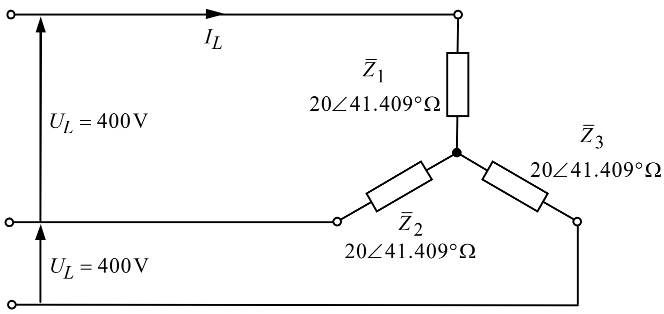
א. נתון כי הערך המוחלט של כל עכבה הוא 20Ω, ומקדם ההספק של כל עכבה הוא 0.75.
ניעזר במקדם ההספק הנתון ונחשב את הזווית של כל עכבה :

$$\phi=\cos^{-1}(0.75)=41.409^{\circ}$$

מכאן :

$$\bar{Z}_1=\bar{Z}_2=\bar{Z}_3=20\angle 41.409^{\circ}=15+13.228j(\Omega)$$

נשרטט את המעגל המתקבל :



המתח הנתון בין כל שני הדקים של המחולל (400V) נקרא מתח הקו. הוא סומן בשרטוט ב- U_L. במעגל מסוג זה, המתח הנופל על כל עכבה קטן פי $\sqrt{3}$ ממתח הקו. מכאן :

$$U_Z=\frac{U_L}{\sqrt{3}}=230.94(\text{V})$$

יש לשים לב שחישבנו את הגודל בלבד, ללא זווית, זאת מאחר והזוויות של מתחי המבוא אינן נתונות (לכן לא שמנו קו מעל המשתנים). מכל מקום אין חישוב הזוויות נצרך בשאלה זו, שהרי התבקשנו לחשב את **הגודל** בלבד של זרם הקו.

זרם הקו הוא הזרם הזורם דרך כל אחת מהעכבות. במעגל מאוזן (כמו המעגל שלנו), **גודלו** של זרם הקו זהה בכל העכבות. נוכל לחשב את גודלו בלבד בעזרת חוק אום, זאת על ידי שנציב את הערך המוחלט של העכבות. מכאן :

$$I_L=I_Z=\frac{U_Z}{Z}=\frac{230.94}{20}=11.547(\text{A})$$

ב. ההספק של "הצרכן" הוא ההספק הכולל של שלושת העכבות. במקרה של עומס מאוזן, הספק זה נתון תמיד על ידי הנוסחה הבאה (מופיעה בנוסחאון) :

$$P_{\text{T}}=\sqrt{3}\,U_L I_L\cos\phi=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 11.547\cdot\cos(41.409^{\circ})=6000(\text{W})$$

בנוסחה זו, U_L הוא מתח הקו, I_L הוא זרם הקו ו- ϕ היא זווית המופע של כל עכבה.

ג. נחשב את Q_{T} ואת S_{T} באותה דרך שבה חישבנו את P_{T} בסעיף הקודם :

$$Q_{\text{T}}=\sqrt{3}\,U_L I_L\sin\phi=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 11.547\cdot\sin(41.409^{\circ})=5291.502(\text{VAR})$$

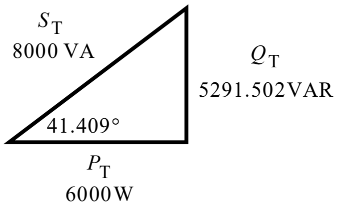
$$S_{\text{T}}=\sqrt{3}\,U_L I_L=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 11.547=8000(\text{VA})$$

נשרטט את משולש ההספקים. הזווית של S_{T} היא הזווית של העכבות. מכאן:

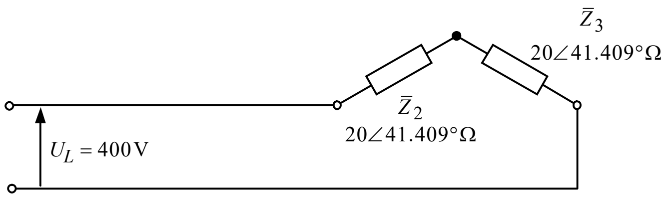
$$P_{\mathrm{T}} = 6000(\mathrm{W})$$

$$Q_{\mathrm{T}} = 5291.502(\mathrm{VAR})$$

$$S_{\mathrm{T}} = 8000(\mathrm{VA})$$



ד. נשרטט מעגל שקול:



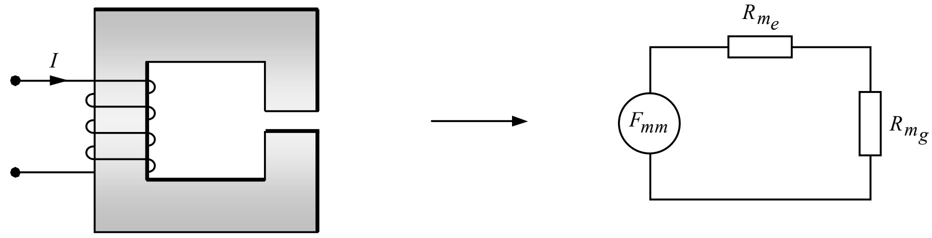
נחשב את העכבה השקולה המתקבלת:

$$\bar{Z}_{2-3} = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = 20\angle 41.409° + 20\angle 41.409° = 40\angle 41.409°(\Omega)$$

ניעזר בחוק אום ונחשב את **גודל** הזרם המבוקש (לא נציב זוויות כדרך בה הלכנו בכל הפתרון):

$$I_{Z_2} = \frac{U_L}{Z_{2-3}} = \frac{400}{40} = 10(\mathrm{A})$$

שאלה 6



בצד שמאל של האיור מובא המעגל המגנטי שבשאלה. בצד ימין של האיור מובא "המעגל החשמלי" האנלוגי למעגל המגנטי הנתון. המיאון R_{m_e} הוא מיאון הליבה והמיאון R_{m_g} הוא מיאון חריץ האוויר (סימונים אלה נלקחו מנוסח השאלה). נרכז נתונים:

$$\ell_e = 30(\text{cm}) = 30\times10^{-2}(\text{m})$$

$$\ell_g = 2.1(\text{mm}) = 2.1\times10^{-3}(\text{m})$$

$$A = 9\left(\text{cm}^2\right) = 9\times10^{-4}\left(\text{m}^2\right)$$

$$N = 125$$

$$I = 1.6(\text{A})$$

א. מיאון מגנטי באופן כללי נתון על ידי הנוסחה:

$$R_m = \frac{\ell}{\mu_0\mu_r A}$$

בסעיף זה נתון כי $\mu\to\infty$. נזכיר כי הסימן μ מציין את החלחלות **הכוללת** של החומר, והוא נתון על ידי המכפלה $\mu=\mu_0\mu_r$. אם הוא שואף לאינסוף כפי הנתון, הדבר אומר שהחלחלות היחסית μ_r של הליבה שואפת לאינסוף (שהרי μ_0 הוא מספר קבוע). מכאן:

- **לגבי מיאון הליבה** – על פי הנתון, המכנה של הנוסחה שואף לאינסוף, ולפיכך המיאון של הליבה שואף לאפס (שהרי ככל שהמכנה גדול יותר, כך התוצאה קטנה יותר. במקרה הקיצון שבו המכנה שואף לאינסוף, התוצאה שואפת לאפס). ובניסוח מתמטי:

$$R_{m_e} = \frac{\ell}{\mu_0\mu_r A} = \frac{\ell}{\infty\cdot A} \quad \to 0$$

- **לגבי מיאון חריץ האוויר** – באוויר תמיד $\mu_r=1$. מכאן:

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0\cancel{\mu_r}A} = \frac{2.1\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot9\times10^{-4}} = 1.856\times10^{6}\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

ב.

$$R_{m_\text{T}} = R_{m_e} + R_{m_g} = 1.856\times10^{6}\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_{m_\text{T}}} = \frac{NI}{R_{m_\text{T}}} = \frac{125\cdot1.6}{1.856\times10^{6}} = 0.107(\text{mWb}) = 107.71(\mu\text{Wb})$$

ג.

$$L_1 = \frac{N^2}{R_{m_T}} = \frac{125^2}{1.856\times10^6} = 8.414(\mathrm{mH})$$

ד. כעת נתון $\mu_r = 250$. יש לדבר השפעה רק על המיאון של הליבה, שהרי כאמור לגבי חריץ האוויר $\mu_r = 1$, ולכן המיאון שלו יישאר כפי שחישבנו. נחשב את המיאון החדש של הליבה ואת המיאון **הכללי** החדש של המעגל המגנטי:

$$R_{m_e} = \frac{\ell_e}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{30\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot250\cdot9\times10^{-4}} = 1.061\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_T} = R_{m_e} + R_{m_g} = 1.061\times10^6 + 1.856\times10^6 = 2.917\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

מכאן:

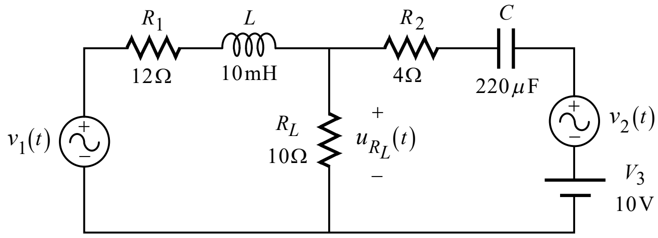
$$L_2 = \frac{N^2}{R_{m_T}} = \frac{125^2}{2.917\times10^6} = 5.354(\mathrm{mH})$$

שאלה 7

הקדמה: במעגל הוצגו רק שני מקורות. אולם יש לשים לב כי מקור המתח $v_2(t)$ נתון על ידי:

$$v_2(t)=10+10\sqrt{2}\sin(500t-75°)(\mathrm{V})$$

ממבנה המשוואה ניתן להסיק כי $v_2(t)$ מורכב משני מקורות – מקור DC שערכו 10V, ומקור AC הנתון על ידי $10\sqrt{2}\sin(500t-75°)$. מדובר בשני מקורות משני סוגים שונים ולכן יש לבחון בסופרפוזיציה את תרומתו של כל מקור בנפרד. הלכך נפריד בין המקורות ונציג את המעגל כאשר הוא כולל שלושה מקורות, כמתואר באיור הבא:



נתון:

$$v_1(t)=20\sqrt{2}\sin(1000t+45°)(\mathrm{V})$$

$$v_2(t)=10\sqrt{2}\sin(500t-75°)(\mathrm{V})$$

כיוונו של V_3 נקבע ככיוונו של $v_2(t)$, שהרי במשוואה שניהם מוצגים בסימן חיובי, מה שאומר ששניהם באותו הכיוון. יש לשים לב שהמשוואה של $v_2(t)$ שבאיור מוצגת כבר ללא חלק ה-DC.

א. **תרומת $v_1(t)$:**

נתון:

$$v_1(t)=20\sqrt{2}\sin(1000t+45°)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

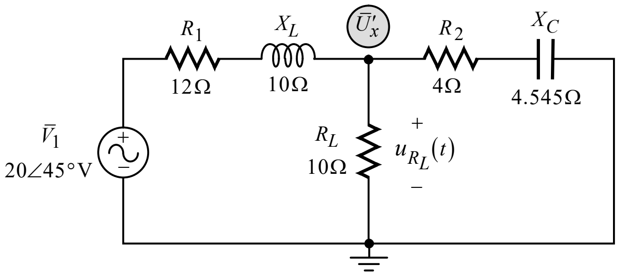
$$\bar{V}_1=\frac{20\sqrt{2}\angle 45°}{\sqrt{2}}=20\angle 45°(\mathrm{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה:

$$X_L=\omega L=1000\cdot 10\times 10^{-3}=10(\Omega)$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot 220\times 10^{-6}}=4.545(\Omega)$$

נקצר את $v_2(t)$ ואת V_3, ונשרטט את המעגל המתקבל:



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את המתח המבוקש:

$$\bar{U}'_{R_L}=\bar{U}'_x=\frac{\dfrac{\bar{V}_1}{R_1+jX_L}}{\dfrac{1}{R_1+jX_L}+\dfrac{1}{R_L}+\dfrac{1}{R_2-jX_C}}=\frac{\dfrac{20\angle 45°}{12+j10}}{\dfrac{1}{12+j10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{4-j4.545}}=4.719\angle -12.62°(\mathrm{V})$$

תרומת $v_2(t)$:

נתון :

$$v_2(t) = 10\sqrt{2}\sin(500t - 75°)(\text{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית) :

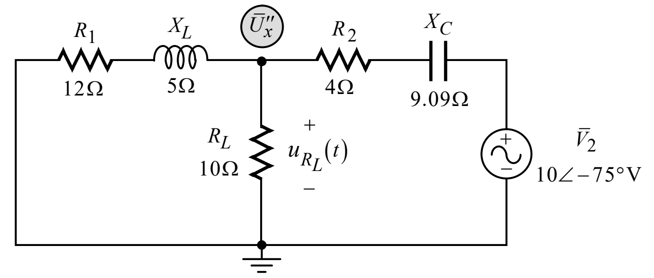
$$\bar{V}_2 = \frac{10\sqrt{2}\angle -75°}{\sqrt{2}} = 10\angle -75°(\text{V})$$

עבור מקור AC יש לסליל ולקבל היגב מסוים. ניעזר בתדר המקור ונחשב היגבים אלה :

$$X_L = \omega L = 500\cdot 10\times 10^{-3} = 5(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500\cdot 220\times 10^{-6}} = 9.09(\Omega)$$

נקצר את $v_1(t)$ ואת V_3, ונשרטט את המעגל המתקבל :

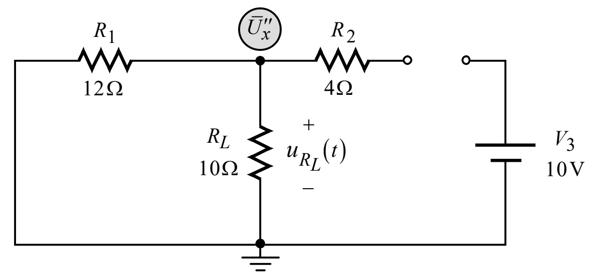


ניעזר במשפט מילמן ונחשב את המתח המבוקש :

$$\bar{U}_{R_L}'' = \bar{U}_x'' = \frac{\dfrac{\bar{V}_2}{R_2 - jX_C}}{\dfrac{1}{R_1 + jX_L} + \dfrac{1}{R_L} + \dfrac{1}{R_2 - jX_C}} = \frac{\dfrac{10\angle -75°}{4 - j9.09}}{\dfrac{1}{12 + j5} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{4 - j9.09}} = 4.563\angle -25.22°(\text{V})$$

תרומת V_3 :

עבור מקור DC הסליל שקול לקֶצר והקבל שקול לנֶתק (במצב המתמיד). נקצר את $v_1(t)$ ואת $v_2(t)$, ונשרטט את המעגל המתקבל :



הנתק שיוצר הקבל גורם לכך שאין מעגל סגור, כך שהמקור V_3 מנותק מהמעגל. כלומר מקור ה-DC אינו תורם כלום למתח של R_L. ובניסוח מתמטי :

$$\bar{U}_{R_L}''' = \bar{U}_x''' = 0(\text{V})$$

נסכם את התרומות: כל הזרמים של R_L שתורמים כל המקורות, פועלים כולם באותו הכיוון – מלמעלה למטה. לפיכך יש לחבר בין התרומות של המקורות השונים. את המתח הכולל נציג כתלות בזמן כנדרש בפתרון בספורפוזיציה, וכנדרש בשאלה עצמה. מכאן:

$$u_{R_L}(t) = u'_{R_L}(t) + u''_{R_L}(t) + \cancel{u'''_{R_L}(t)} =$$

$$= 4.719\sqrt{2}\sin(1000t - 12.62°) + 4.563\sqrt{2}\sin(500t - 25.22°)(\mathrm{V})$$

ב. המתח הממוצע שווה תמיד לערך ה-DC. במקרה שלנו התרומה שתורם מקור ה-DC היא אפס. מכאן:

$$U_{R_L(\mathrm{av})} = U'''_{R_L} = 0(\mathrm{V})$$

ג. את הערך היעיל השקול נחשב בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

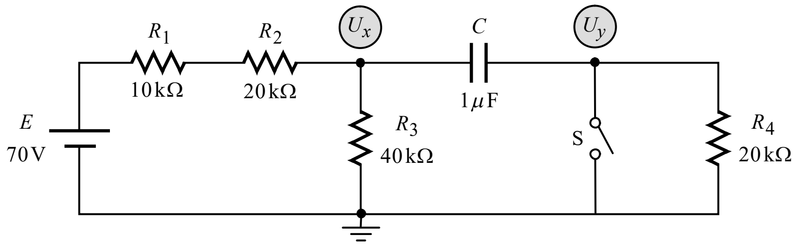
$$U_{R_L(\mathrm{rms})} = \sqrt{U^2_{R_L(\mathrm{rms_1})} + U^2_{R_L(\mathrm{rms_2})}} = \sqrt{4.719^2 + 4.563^2} = 6.565(\mathrm{V})$$

ד. את **ההספק הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת הערך **היעיל**. מכאן:

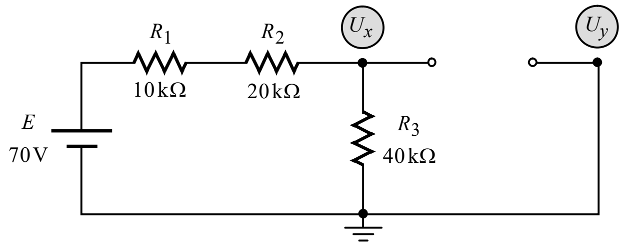
$$P_{R_L} = \frac{U^2_{R_L(\mathrm{rms})}}{R_L} = \frac{6.565^2}{10} = 4.310(\mathrm{W})$$

שאלה 8

נסדר מעט את המעגל הנתון ונציגו בצורה הנוחה לעבודה:



א. בסעיף זה נתון שהמפסק סגור הרבה זמן. סגירת המפסק גורמת לקיצורו של R_4. בנוסף, במצב המתמיד הקבל שקול לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



1. כפי שניתן לראות, נותרנו עם מעגל טורי הכולל שלושה נגדים. מתח הקבל שווה למתח של R_3 (כך עולה ממסלול מתחים בין הדקיו). ניעזר בכלל מחלק המתח ונקבל:

$$U_C = U_{R_3} = \frac{E \cdot R_3}{R_{1-2} + R_3} = \frac{70 \cdot 40\text{k}}{10\text{k} + 20\text{k} + 40\text{k}} = 40(\text{V})$$

2. המתח U_x הוא המתח של R_3 אותו חישבנו. ובניסוח מתמטי:

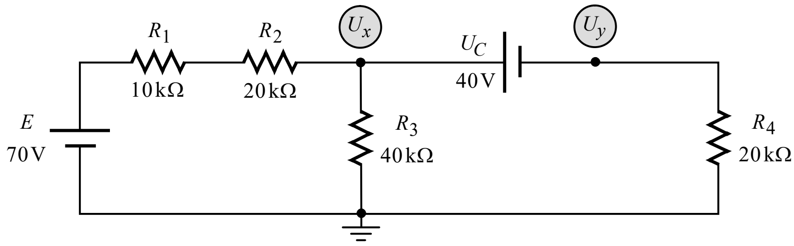
$$U_x = U_{R_3} = 40(\text{V})$$

המתח U_y הוא אפס, וכפי שניתן להסיק מהאיור:

$$U_y = 0(\text{V})$$

ב.

1. הקבל שקול לקֶצר במצב ההתחלתי, רק כאשר הוא אינו טעון. אם הוא טעון, וכמו במצב הנוכחי, הוא שקול למקור מתח שערכו ברגע ההתחלתי 40V, וכפי שהיה ברגע שלפני פתיחת המפסק. נשרטט מעגל שקול:



כיוונו של מתח הקבל נגזר מכיוון הטעינה שלו – הנקודה בה נכנס הזרם לקבל מקבלת סימן "פלוס" (וכמו בנגדים). יש לשים לב שהמתח U_y אינו יוצר צומת נוסף. במעגל יש רק שני צמתים – הצומת של U_x והצומת המחובר לאדמה.

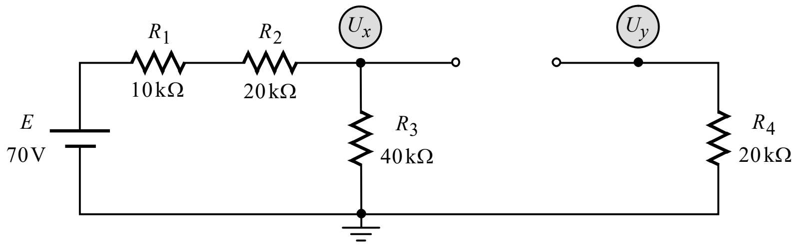
נפתור במילמן:

$$U_x = \frac{\frac{E}{R_1+R_2}+\frac{U_C}{R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{70}{10\text{k}+20\text{k}}+\frac{40}{20\text{k}}}{\frac{1}{10\text{k}+20\text{k}}+\frac{1}{40\text{k}}+\frac{1}{20\text{k}}} = 40(\text{V})$$

ניעזר בתוצאה שקיבלנו ונחשב את הזרם העובר דרך הקבל:

$$I_C = I_{R_4} = \frac{U_x - U_C}{R_4} = \frac{40-40}{20\text{k}} = 0(\text{A})$$

2. במצב המתמיד הקבל תמיד שקול לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



המעגל שקיבלנו כעת זהה מבחינה חשמלית למעגל שקיבלנו בסעיף א' (ההבדל היחיד הינו שכאן הנגד R_4 אינו מקוצר. נתון זה אינו משנה דבר, שהרי ממילא נגד זה אינו "פעיל" כתוצאה מהנתק הנוצר על ידי הקבל). מכאן נוכל להסיק כי התוצאות כאן יהיו זהות לתוצאות שקיבלנו בסעיף א'. ובניסוח מתמטי:

$$U_x = U_{R_3} = 40(\text{V})$$

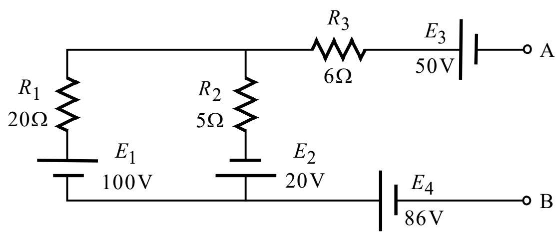
$$U_y = 0(\text{V})$$

3. גם תוצאה זו זהה לתוצאה שקיבלנו בסעיף א':

$$U_C = U_{R_3} = 40(\text{V})$$

שאלה 9

א.

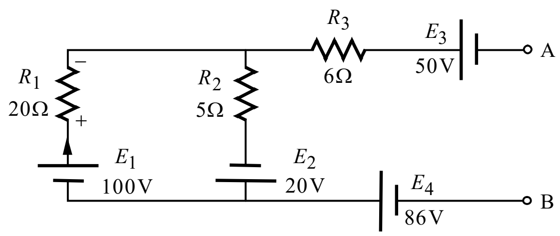


החלק הפעיל במעגל זה הוא החלק השמאלי הכולל את E_1 , E_2 , R_1 , R_2 . רכיבים אלה מהווים יחד מעגל טורי פשוט. נחשב את הזרם במעגל זה:

$$I=\frac{E_1+E_2}{R_1+R_2}=\frac{100+20}{20+5}=4.8(\text{A})$$

לגבי כיוון הזרם – שני המקורות פועלים באותו הכיוון, כך שהזרם במעגל זורם **עם כיוון השעון**.

ב. **<u>חישוב מתח תבנין:</u>**



נחשב תחילה את המתח על R_1 :

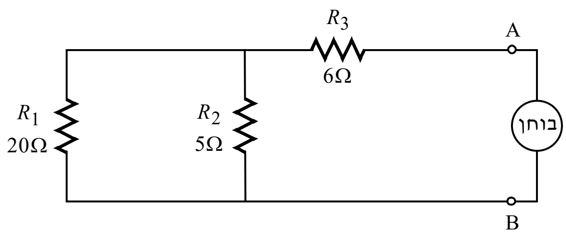
$$U_{R_1}=I\cdot R_1=4.8\cdot 20=96(\text{V})$$

מתח תבנין הוא המתח בין A ל-B. נחשבו בעזרת מסלול מתחים בין נקודות אלו. קוטביות המתח של R_1 סומנה באיור (בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן "פלוס"). המתח על R_3 הוא אפס שהרי אין זרם דרכו. מכאן:

$$E_{\text{Th}}=U_{\text{AB}}=-E_3-U_{R_1}+E_1+E_4=-50-96+100+86=40(\text{V})$$

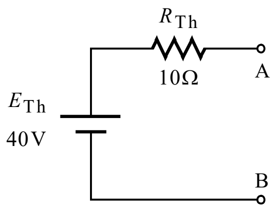
<u>חישוב התנגדות תבנין:</u>

נקצר את מקורות המתח, נניח מקור בוחן בין ההדקים A ו-B ונשרטט מעגל שקול:

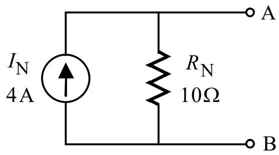


$$R_{\text{Th}}=R_1\parallel R_2+R_3=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)^{-1}+6=10(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ג. ניעזר בהמרת מקורות ונמיר את מעגל תבנין שקיבלנו למעגל נורטון:



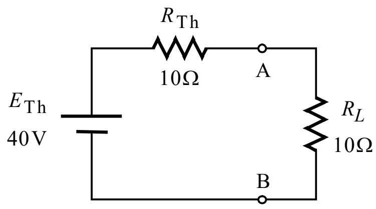
$$R_N = R_{Th} = 10(\Omega)$$

$$I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{40}{10} = 4(A)$$

ד. התנאי להעברת הספק מרבי הינו:

$$R_L = R_{Th} = 10(\Omega)$$

נחבר את נגד העומס למעגל תבנין שקיבלנו ונחשב את ההספק שלו (ניתן כמובן לחברו גם למעגל נורטון. התוצאה שנקבל תהא זהה):



$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{40}{10+10} = 2(A)$$

$$P_{R_L} = I^2 \cdot R_L = 2^2 \cdot 10 = 40(W)$$

שאלה 10

א. **חישוב מתח תבנין:**

נתון:

$$e_1(t)=150\sqrt{2}\sin(2000t+\pi/6)(\mathrm{V})$$

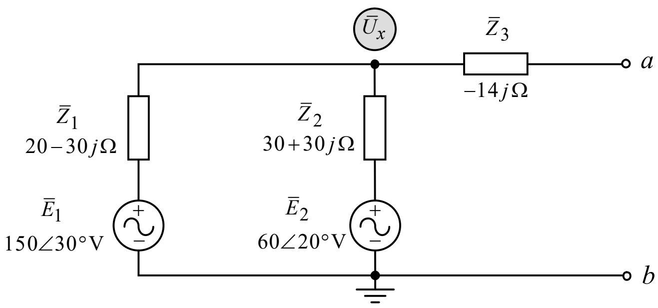
$$e_2(t)=60\sqrt{2}\sin(2000t+\pi/9)(\mathrm{V})$$

הזוויות של המקורות נתונות ברדיאנים. על מנת לקבלן במעלות יש להציב $180°$ במקום π.
נציג את מתחי המקורות בהצגה חלקית (פאזורית):

$$\bar{E}_1=\frac{150\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 180°/6=150\angle 30°(\mathrm{V})$$

$$\bar{E}_2=\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 180°/9=60\angle 20°(\mathrm{V})$$

התבקשנו למצוא את ערכיו של מעגל תבנין עבור $\bar{Z}_L$. ננתק את $\bar{Z}_L$ ונשרטט מעגל שקול:



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את $\bar{U}_x$:

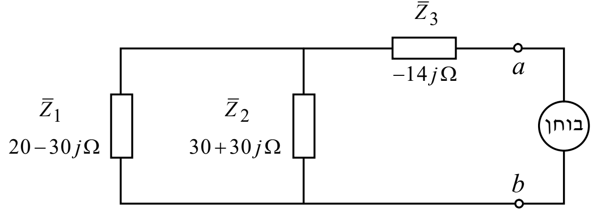
$$\bar{U}_x=\frac{\dfrac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1}+\dfrac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_1}+\dfrac{1}{\bar{Z}_2}}=\frac{\dfrac{150\angle 30°}{20-30j}+\dfrac{60\angle 20°}{30+30j}}{\dfrac{1}{20-30j}+\dfrac{1}{30+30j}}=118.61\angle 55.13°(\mathrm{V})$$

מתח תבנין הוא המתח $\bar{U}_{ab}$. מאחר והמתח על $\bar{Z}_3$ הוא אפס, $\bar{U}_{ab}$ שווה ל- $\bar{U}_x$. מכאן:

$$\bar{E}_{\mathrm{Th}}=\bar{U}_{ab}=\bar{U}_x=118.61\angle 55.13°(\mathrm{V})$$

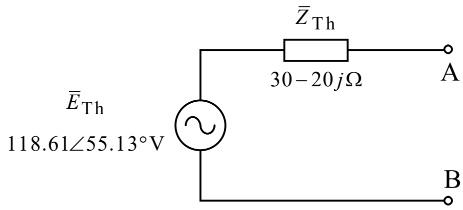
חישוב התנגדות תבנין:

נקצר את מקורות המתח, נניח מקור בוחן בין a ו-b ונשרטט מעגל שקול:



$$\bar{Z}_{\mathrm{Th}}=\bar{Z}_1\parallel\bar{Z}_2+\bar{Z}_3=\left(\frac{1}{20-30j}+\frac{1}{30+30j}\right)^{-1}-14j=30-20j(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ב. התנאי להעברת הספק מרבי עבור מקרה זה הינו:

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{\text{Th}}^* = 30+20j(\Omega)$$

ג. נחבר את $\bar{Z}_L$ למעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב את ההספקים:

$$\bar{I}_{Z_L} = \frac{\bar{E}_{\text{Th}}}{\bar{Z}_{\text{Th}}+\bar{Z}_L} = \frac{118.61\angle 55.13°}{30-20j+30+20j} = 1.976\angle 55.13°\ (\text{A})$$

$$\bar{U}_{Z_L} = \bar{I}_{Z_L}\cdot\bar{Z}_L = (1.976\angle 55.13°)(30+20j) = 71.278\angle 88.82°\ (\text{V})$$

$$\bar{S}_{\bar{Z}_L} = \bar{U}_{Z_L}\cdot\bar{I}_{Z_L}^* = (71.278\angle 88.82°)(1.976\angle -55.13°) =$$

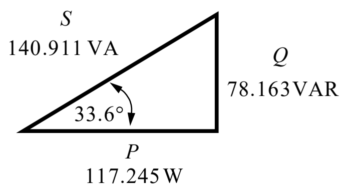
$$= 117.245+78.163j = 140.911\angle 33.6°\ (\text{VA})$$

מכאן:

$$P = 117.245(\text{W})$$

$$Q = 78.163(\text{VAR})$$

$$S = 140.911(\text{VA})$$



ד. העומס הינו כאמור:

$$\bar{Z}_L^* = 30+20j(\Omega)$$

מכאן שהעומס ניתן לייצוג על ידי **נגד וסליל** המחוברים בטור. כידוע החלק הממשי של העומס שווה להתנגדות הנגד, והחלק המדומה שווה להיגב הסליל. מכאן:

$$R_{(Z_L)} = 30(\Omega)$$

$$X_{(Z_L)} = 20(\Omega)$$

התבקשנו לחשב את **השראות** הסליל. תדירות המקורות נתונה בביטויי המתח הנתונים של המקורות. מכאן:

$$X_L = \omega L \quad \Rightarrow$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{20}{2000} = 0.01(\text{H}) = 10(\text{mH})$$