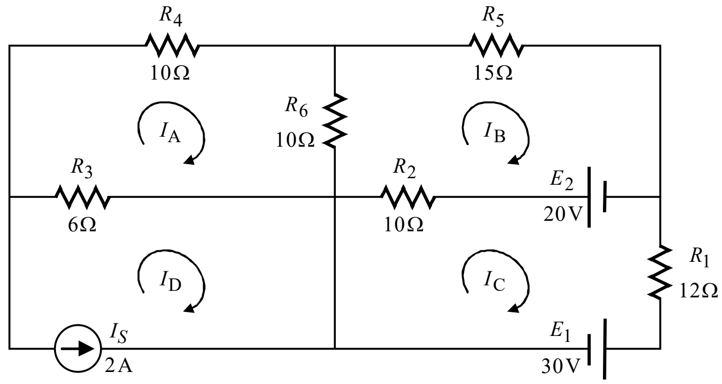
פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – קיץ 2024 מועד א׳

שאלה 1

א.



נפתור בזרמי חוגים. יש לשים לב שבחוג D יש מקור זרם על ענף חיצוני. מכאן:

$$I_D = -I_S = -2(A)$$

מכיוון ש- I_D הפוך בכיוונו למקור הזרם, הוא קיבל סימן שלילי. מאחר ו- I_D ידוע לנו, אין צורך לרשום עבורו משוואת חוג. נרשום את משוואות שלושת החוגים הנותרים.

חוג A:

$$(R_3+R_4+R_6)I_A - (R_6)I_B - 0\cdot I_C - (R_3)I_D = 0$$

$$(6+10+10)\cdot I_A - (10)I_B - 0\cdot I_C - (6)(-2) = 0$$

$$(6+10+10)\cdot I_A - (10)I_B - 0\cdot I_C = +(6)(-2)$$

יש לשים לב שהצבנו את הערך של I_D, והעברנו מכפלה זו של I_D אל האגף הימני שבו המספרים החופשיים.

חוג B:

$$-(R_6)I_A + (R_2+R_5+R_6)I_B - (R_2)I_C \cancel{-0\cdot I_D} = E_2$$

$$-(10)I_A + (10+15+10)I_B - (10)I_C = 20$$

חוג C:

$$-0\cdot I_A - (R_2)I_B + (R_1+R_2)I_C \cancel{-0\cdot I_D} = -E_1 - E_2$$

$$-0\cdot I_A - (10)I_B + (12+10)I_C = -30-20$$

פתרון המשוואות נותן:

$I_{\mathrm{A}} = -0.567\,(\mathrm{A})$

$I_{\mathrm{B}} = -0.275(\mathrm{A})$

$I_{\mathrm{C}} = -2.398(\mathrm{A})$

$I_{\mathrm{D}} = -I_S = -2(\mathrm{A})$ $\leftarrow$ נתון בשאלה

כל הזרמים יצאו שליליים, מה שאומר שהכיוון שלהם בפועל הפוך להנחה ההתחלתית.
נחשב את הזרמים המבוקשים:

$I_{R_1} = I_{\mathrm{C}} = 2.398(\mathrm{A})$

$I_{R_4} = I_{\mathrm{A}} = 0.567\,(\mathrm{A})$

$I_{R_5} = I_{\mathrm{B}} = 0.275(\mathrm{A})$

ב. המקור E_1:

$I_{E_1} = I_{\mathrm{C}} = 2.398(\mathrm{A})$

הזרם I_{C} יצא כאמור שלילי, מה שאומר שכיוונו בפועל הוא נגד כיוון השעון. נמצא שהזרם יוצא מההדק החיובי של E_1 ולכן מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק של מקור זה:

$P_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 30 \cdot 2.398 = 71.944(\mathrm{W})$

המקור E_2:

$I_{E_2} = I_{\mathrm{C}} - I_{\mathrm{B}} = 2.398 - 0.275 = 2.122(\mathrm{A})$

הזרם I_{C} גדול מ- I_{B} ולכן הזרם בכיוון של I_{C}. נמצא שהזרם יוצא מההדק החיובי של E_2 ולכן מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק של מקור זה:

$P_{E_2} = E_2 \cdot I_{E_2} = 20 \cdot 2.122 = 42.444(\mathrm{W})$

ג.

$I_{R_3} = I_{\mathrm{D}} - I_{\mathrm{A}} = 2 - 0.567 = 1.432(\mathrm{A})$

הזרם I_{D} גדול מ- I_{A} ולכן הזרם בכיוון של I_{D}. נמצא שהזרם דרך R_3 זורם בכיוון שמאל. כידוע בנגד נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן "פלוס". במילים אחרות – צד ימין של R_3 מקבל סימן "פלוס". נצא כעת למסלול מתחים סביב הדקיו של מקור הזרם. אנו נצא מצד ראש החץ של המקור ונעבור דרך R_3. מכאן:

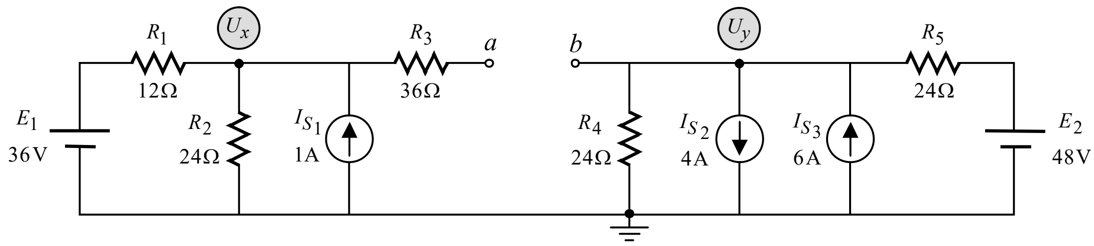
$U_{I_S} = U_{R_3} = I_{R_3} \cdot R_3 = 1.432 \cdot 6 = 8.593(\mathrm{V})$

המתח של מקור הזרם יצא חיובי ולכן מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק של מקור זה:

$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 8.593 \cdot 2 = 17.187(\mathrm{W})$

שאלה 2

א. **חישוב מתח תבנין:**



הנתק בין a ל-b גורם לכך שלא עובר זרם מחלקו הימני של המעגל לחלקו השמאלי ולהיפך, כך ששני חלקי המעגל מתפקדים למעשה כשני מעגלים נפרדים.

החלק השמאלי של המעגל:

ניעזר במשפט מילמן ונחשב את U_x :

$$U_x = \frac{\frac{E_1}{R_1}+I_{S_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{36}{12}+1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{24}} = 32(\mathrm{V})$$

החלק הימני של המעגל:

ניעזר במשפט מילמן ונחשב את U_y :

$$U_y = \frac{\frac{E_2}{R_5}+I_{S_3}-I_{S_2}}{\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}} = \frac{\frac{48}{24}+6-4}{\frac{1}{24}+\frac{1}{24}} = 48(\mathrm{V})$$

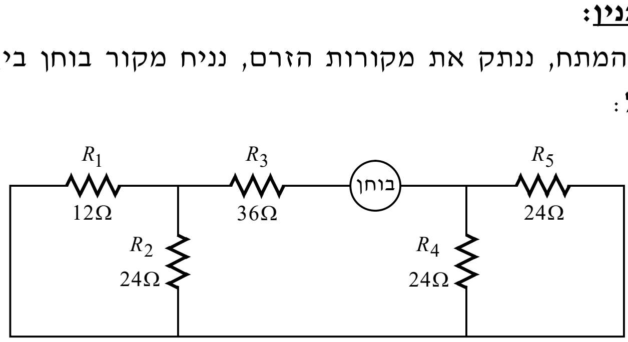
מתח תבנין הוא המתח בין a ל-b. נחשב מתח זה בעזרת מסלול מתחים בין הנקודות. המתח של R_3 הוא אפס. מכאן:

$$E_{\mathrm{Th}} = U_{ab} = U_x - U_y = 32-48=-16(\mathrm{V})$$

שמנו סימן שלילי לפני U_y, זאת מכיוון שהלכנו מהאדמה לכיוון U_y ולא להיפך. קיבלנו תוצאה שלילית עבור E_{Th}. הדבר אומר שההדק החיובי של מקור המתח תבנין יפנה לכיוון נקודה b (הרחבה על הנידון של מסלולי מתחים ניתן למצוא בספרנו ״תורת החשמל להנדסאים״, בפרק העוסק במעגלי זרם ישר).

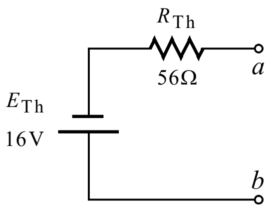
חישוב התנגדות תבנין:

נקצר את מקורות המתח, ננתק את מקורות הזרם, נניח מקור בוחן בין ההדקים A ו-B ונשרטט מעגל שקול:



$$R_{\mathrm{Th}} = R_3 + (R_1 \parallel R_2) + (R_4 \parallel R_5) = 36 + \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)^{-1}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{24}\right)^{-1} = 56(\Omega)$$

נשרטט את מעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ב. נמצא תחילה את ערך ההספק המרבי. התנאי להעברת הספק מרבי הוא:

$$R_L = R_{\text{Th}} = 56(\Omega)$$

נחשב את ההספק המרבי:

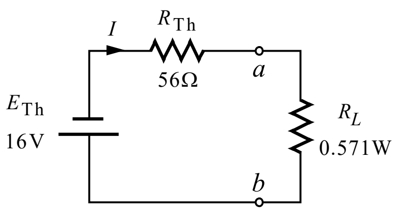
$$I = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{16}{56+56} = 0.142(\text{A})$$

$$P_{R_{L(\max)}} = I^2 \cdot R_L = 0.142^2 \cdot 56 = 1.142(\text{W})$$

חצי מההספק המרבי הוא אפוא:

$$P_{R_L} = \frac{P_{R_{L(\max)}}}{2} = \frac{1.142}{2} = 0.571(\text{W})$$

כעת עלינו לחשב אילו ערכים של R_L נותנים הספק זה. ישנם שני ערכים כאלה. נחבר את R_L למעגל תבנין ונציין על גביו את הידוע לנו:



נרשום את מאזן ההספקים של המעגל:

$$P_E = P_{R_{\text{Th}}} + P_{R_L}$$

נייצג את ההספקים של המשוואה האחרונה בעזרת נוסחאות ההספקים המוכרות, מלבד ההספק של R_L שערכו ידוע לנו:

$$P_E = P_{R_{\text{Th}}} + P_{R_L}$$

$$E_{\text{Th}} \cdot I = I^2 \cdot R_{\text{Th}} + 0.571$$

נציב ערכים ונסדר את המשוואה בצורה של משוואה ריבועית (נציין כי ערך הזרם שקיבלנו לעיל התקבל עבור $R_L = R_{\text{Th}}$ ועבור מצב של הספק מרבי, ולכן הוא אינו רלוונטי כעת):

$$16I = 56I^2 + 0.571$$

$$56I^2 - 16I + 0.571 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שלה שני פתרונות:

$$I_1 = 0.243(\text{A})$$

$$I_2 = 0.041(\text{A})$$

ניעזר בשני פתרונות אלה ובמעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב עבורם שני ערכים של R_L :

$$I_1=\frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}+R_{L_1}}$$

$$0.243=\frac{16}{56+R_{L_1}}$$

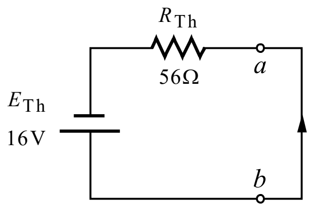
$$R_{L_1}=9.608(\Omega)$$

$$I_2=\frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}+R_{L_2}}$$

$$0.041=\frac{16}{56+R_{L_2}}$$

$$R_{L_2}=326.391(\Omega)$$

ג. נחבר תיל בין a ל-b במעגל תבנין שקיבלנו :

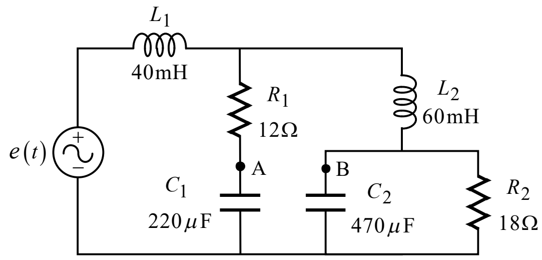


כיוונו של הזרם הוא מ-b ל-a, זאת בהתאם לכיוונו של E_{Th} אותו קיבלנו. נחשב את גודלו של הזרם :

$$I=\frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}}=\frac{16}{56}=0.285(\text{A})$$

שאלה 3

א. נשרטט את המעגל הנתון בשאלה:



המעגל במתכונתו הנוכחית דורש "עיבוד" מסוים לצורך הפתרון. נתון:

$$e(t)=\sqrt{2}\cdot 230\sin(314t+120°)(\mathrm{V})$$

נציג את מתח המקור בהצגה חלקית (פאזורית):

$$\bar{E}=\frac{\sqrt{2}\cdot 230\angle 120°}{\sqrt{2}}=230\angle 120°(\mathrm{V})$$

ניעזר בתדירות הנתונה של המקור ונחשב את ההיגבים של הסלילים והקבלים. לשם נוחות הפתרון נגדיר מראש את ההתנגדויות וההיגבים השונים כעכבות. מכאן:

$$\bar{Z}_1=jX_{L_1}=j\omega L_1=j314\cdot 40\times 10^{-3}=j12.56(\Omega)$$

$$\bar{Z}_2=R_1=12(\Omega)$$

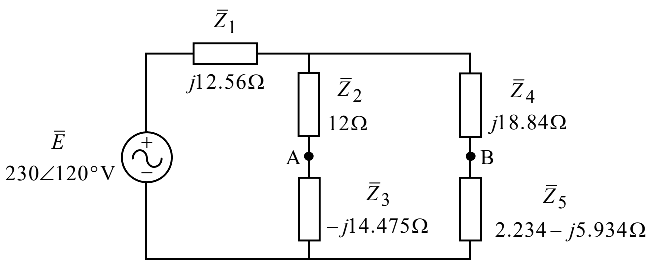
$$\bar{Z}_3=-jX_{C_1}=-j\frac{1}{\omega C_1}=-j\frac{1}{314\cdot 220\times 10^{-6}}=-j14.475(\Omega)$$

$$\bar{Z}_4=jX_{L_2}=j\omega L_2=j314\cdot 60\times 10^{-3}=j18.84(\Omega)$$

$$X_{C_2}=\frac{1}{\omega C_2}=\frac{1}{314\cdot 470\times 10^{-6}}=6.775(\Omega)$$

$$\bar{Z}_5=\left(\frac{1}{-jX_{C_2}}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{-j6.775}+\frac{1}{18}\right)^{-1}=2.234-j5.934(\Omega)$$

נשרטט מעגל שקול:



נחשב את העכבה השקולה של המעגל ואת הזרם הכללי של המעגל:

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}}=\bar{Z}_1+\left(\frac{1}{\bar{Z}_{2-3}}+\frac{1}{\bar{Z}_{4-5}}\right)^{-1}=j12.56+\left(\frac{1}{12-j14.475}+\frac{1}{j18.84+2.234-j5.934\Omega}\right)^{-1}=$$

$$=13.888+22.700j(\Omega)=26.611\angle 58.540°(\Omega)$$

$$\bar{I}_{\mathrm{T}}=\frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{\mathrm{T}}}=\frac{230\angle 120°}{13.888+22.700j}=8.642\angle 61.45°(\mathrm{A})$$

נחשב את הזרם העובר דרך כל ענף:

$$\bar{I}_{2-3}=\frac{\bar{I}_{\mathrm{T}}\cdot\bar{Z}_{4-5}}{\bar{Z}_{2-3}+\bar{Z}_{4-5}}=\frac{(8.642\angle 61.45°)(j18.84+2.234-j5.934\Omega)}{12-j14.475+j18.84+2.234-j5.934\Omega}=7.904\angle 147.93°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{4-5}=\bar{I}_{\mathrm{T}}-\bar{I}_{2-3}=8.642\angle 61.45°-7.904\angle 147.93°=11.347\angle 17.414°(\mathrm{A})$$

נחשב את המתחים של $\bar{Z}_3$ ו- $\bar{Z}_5$:

$$\bar{U}_{Z_3}=\bar{I}_{2-3}\cdot\bar{Z}_3=(7.904\angle 147.93°)(-j14.475)=114.422\angle 57.93°(\mathrm{V})$$

$$\bar{U}_{Z_5}=\bar{I}_{4-5}\cdot\bar{Z}_5=(11.347\angle 17.414°)(2.234-j5.934\Omega)=71.963\angle -51.95°(\mathrm{V})$$

נחשב את המתח בין A ל-B בעזרת מסלול מתחים בין הנקודות. נזכיר שבעכבה (כמו בנגד) נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן "פלוס". מכאן:

$$\bar{U}_{\mathrm{AB}}=\bar{U}_{Z_3}-\bar{U}_{Z_5}=114.422\angle 57.93°-71.963\angle -51.95°=154.514\angle 83.908°(\mathrm{V})$$

ב.

$$\bar{S}=\bar{E}\cdot\bar{I}_{\mathrm{T}}^{\;*}=(230\angle 120°)(8.642\angle -61.45°)=1987.83\angle 58.540°=1037.44+j1695.63(\mathrm{VA})$$

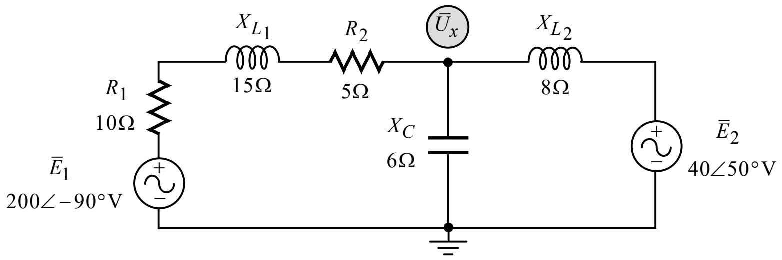
ג. זווית המופע של המעגל היא הזווית של $\bar{S}$ או של $\bar{Z}_{\mathrm{T}}$. מכאן:

$$PF=\cos\phi=\cos(58.540°)=0.521$$

שאלה 4

א. נמיר את מקור הזרם והנגד **שבמקביל** אליו, למקור מתח עם נגד **בטור** אליו, ונשרטט מעגל שקול:

$$\bar{E}_1 = \bar{I}_S \cdot R_1 = (20\angle -90°)\cdot 10 = 200\angle -90°(\mathrm{V})$$



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את מתח הקבל:

$$\bar{U}_C = \bar{U}_x = \frac{\dfrac{\bar{E}_1}{R_1 + jX_{L_1} + R_2} + \dfrac{\bar{E}_2}{jX_{L_2}}}{\dfrac{1}{R_1 + jX_{L_1} + R_2} + \dfrac{1}{-jX_C} + \dfrac{1}{jX_{L_2}}} = \frac{\dfrac{200\angle -90°}{10+15j+5} + \dfrac{40\angle 50°}{8j}}{\dfrac{1}{10+15j+5} + \dfrac{1}{-6j} + \dfrac{1}{8j}} = 299.182\angle -120.05°(\mathrm{V})$$

ב.

$$\bar{I}_{L_2} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{U}_x}{jX_{L_2}} = \frac{40\angle 50° - 299.182\angle -120.05°}{8j} = 42.331\angle -31.22°(\mathrm{A})$$

ג.

$$\bar{I}_{E_2} = \bar{I}_{L_2} = 42.331\angle -31.22°(\mathrm{A})$$

$$\bar{S}_{E_2} = \bar{E}_2 \cdot \bar{I}_{E_2}^{\,*} = (40\angle 50°)(42.331\angle +31.22°) = 258.38 + 1673.42j = 1693.25\angle 81.22°(\mathrm{VA})$$

מכאן:

$$P = 258.38(\mathrm{W})$$

$$Q = 1673.42(\mathrm{VAR})$$

$$S = 1693.25(\mathrm{VA})$$

שאלה 5

א.

- הנגד R_1 – נתונים הערכים הנקובים שלו $50\text{V}/250\text{W}$. מכאן:

$$P_{R_1}=\frac{{U_{R_1}}^2}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad R_1=\frac{{U_{R_1}}^2}{P_{R_1}}=\frac{50^2}{250}=10(\Omega)$$

ראוי לציין כי "הערכים הנקובים" הם "נתוני יצרן" בלבד, ולרוב אינם הערכים בפועל של הנגד. הדבר תלוי במעגל אליו הנגד מחובר. מכל מקום, ערך ההתנגדות שחישבנו יישאר תמיד זהה, שהרי ערך זה אינו תלוי במעגל אליו הנגד מחובר.

- הנגד R_2 – בשאלה מובאים תכונות החומר ממנו עשוי המוליך – $\ell=100\text{m}$, $A=0.5\text{mm}^2$, $\rho=0.02\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$. נחשב את התנגדותו של R_2 בעזרת הנוסחה הבאה:

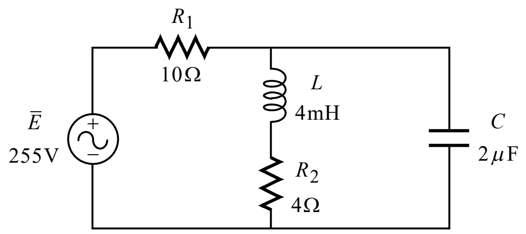
$$R_2=\frac{\rho\ell}{A}=\frac{0.02\cdot 100}{0.5}=4(\Omega)$$

יש לשים לב שלא המרנו את A ליחידות של m^2, זאת מכיוון שהנוסחה שבה עשינו שימוש מותאמת ליחידת המדידה mm^2 (וכפי שציינו בנוסחאון).

- הקבל C – נתון שהוא מורכב מ-5 קבלים זהים המחוברים **בטור**. ערכו של קבל בודד הוא $10\mu\text{F}$. נחשב את הקיבול השקול. מכיוון שהקבלים זהים נוכל לרשום:

$$C=\frac{10\mu}{n}=\frac{10\mu}{5}=2(\mu\text{F})$$

נשרטט את המעגל המתקבל:



ב. מדובר במעגל תהודה מקבילי מעשי בעל קבל אידיאלי. תדר התהודה של מעגל מסוג זה הוא:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{{R_L}^2}{L^2}}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{{R_2}^2}{L^2}}=\sqrt{\frac{1}{4\times10^{-3}\cdot 2\times10^{-6}}-\frac{4^2}{\left(4\times10^{-3}\right)^2}}=11135.528\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{11135.528}{2\pi}=1772.274(\text{Hz})$$

ג. נחשב תחילה את העכבה השקולה של המעגל:

$$X_L = \omega L = 11135.528 \cdot 4 \times 10^{-3} = 44.542(\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{11135.528 \cdot 2 \times 10^{-6}} = 44.901(\Omega)$$

$$\bar{Z}_{\mathrm{T}} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2 + jX_L} + \frac{1}{-jX_C}\right)^{-1} = 10 + \left(\frac{1}{4 + j44.542} + \frac{1}{-j44.901}\right)^{-1} = 510(\Omega)$$

כצפוי קיבלנו עכבה בעלת אופי אוהמי טהור (ללא j), וכמו בכל מעגל תהודה (נציין כי תוצאה מדוייקת כזו תתקבל כאשר עובדים עם זכרונות המחשבון, כך שמציבים את כל הספרות אחרי הנקודה. אחרת יתקבל חלק מדומה קטן ויש להזניחו).
נציין כי במעגל תהודה מסוג זה אין הכרח שהיגב הסליל יהיה שווה להיגב הקבל (במקרה שלנו ערכי ההיגבים קרובים אך אינם זהים). מכל מקום העכבה הכללית של המעגל צריכה להתקבל ללא חלק מדומה כלל (הרחבה על סוגי התהודה השונים ועל המאפיינים של כל סוג ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק במעגלי תהודה).

נחשב את הזרם הכללי:

$$\bar{I}_{\mathrm{T}} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{\mathrm{T}}} = \frac{255}{510} = 0.5(\mathrm{A})$$

נחשב את ההספק של המקור. מאחר ואין בעכבת המעגל חלק מדומה, ההספק ההיגבי Q שווה לאפס. נחשב את ההספק **הממשי** של המקור:

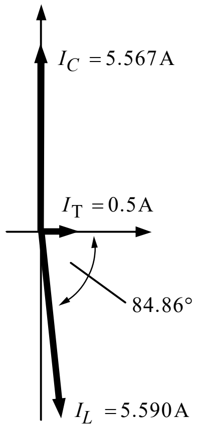
$$P_{\mathrm{T}} = I_{\mathrm{T}}^{\,2} \cdot Z_{\mathrm{T}} = 0.5^2 \cdot 510 = 127.5(\mathrm{W})$$

ד.

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{I}_{\mathrm{T}} \cdot (-jX_C)}{R_2 + jX_L - jX_C} = \frac{0.5 \cdot (-j44.901)}{4 + j44.542 - j44.901} = 5.590\angle -84.86°(\mathrm{A})$$

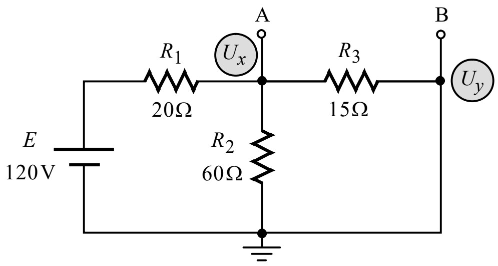
$$\bar{I}_C = \bar{I}_{\mathrm{T}} - \bar{I}_L = 0.5 - 5.590\angle -84.86° = 5.567\angle 90°(\mathrm{A})$$

נשרטט את דיאגרמת הזרמים של המעגל:



שאלה 6

א. כאשר המפסק סגור, הנגד R_4 מקוצר. כמו כן נתון שהמעגל היה במצב זה הרבה זמן, כך שהקבל שקול לנֶתק. נחליף את R_4 בקֶצר ואת הקבל בנֶתק ונשרטט מעגל שקול:



1. ניעזר במשפט מילמן ונחשב את U_x:

$$U_x = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{120}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{15}} = 45(\text{V})$$

המתח על הדקי הקבל הוא המתח בין A ל-B. מסלול מתחים פשוט בין הנקודות מראה שזהו המתח על R_3. זהו למעשה המתח שחישבנו – U_x. ובניסוח מתמטי:

$$U_C = U_x = 45(\text{V})$$

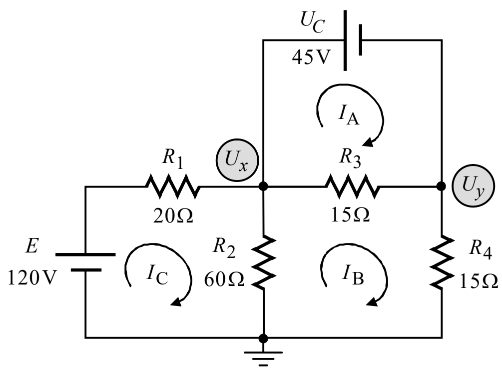
2. את U_x חישבנו לעיל. המתח U_y הוא אפס (U_y מחובר ישירות לאדמה). ובניסוח מתמטי:

$$U_x = 45(\text{V})$$

$$U_y = 0(\text{V})$$

ב.

1. נתון שהמפסק נפתח. בשאלה ביקשו לחשב את הזרם דרך הקבל ברגע ההתחלתי. מאחר והקבל היה טעון, הוא אינו קצר, אלא הוא שקול למקור מתח שערכו 45V (זהו המתח שהיה עליו רגע לפני השינוי, וכפי שחישבנו לעיל). ההדק החיובי של מקור מתח זה יהיה בצד שמאל של הקבל (בקבל, כמו בנגד, נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן "פלוס"). נשרטט מעגל שקול:



נפתור בזרמי חוגים:

חוג A:

$$(R_3)I_A - (R_3)I_B - (0)I_C = -U_C$$

$$(15)I_A - (15)I_B - (0)I_C = -45$$

חוג B:

$$-(R_3)I_A + (R_2 + R_3 + R_4)I_B - (R_2)I_C = 0$$

$$-(15)I_A + (60+15+15)I_B - (60)I_C = 0$$

חוג C:

$$-(0)I_A - (R_2)I_B + (R_1 + R_2)I_C = E$$

$$-(0)I_A - (60)I_B + (20+60)I_C = 120$$

פתרון המשוואות נותן:

$$I_A = -1.5(\mathrm{A})$$

$$I_B = 1.5(\mathrm{A})$$

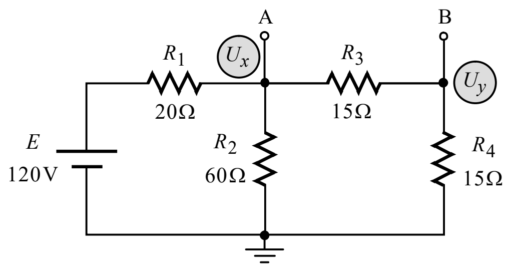
$$I_C = 2.625(\mathrm{A})$$

זרם הקבל הוא הזרם I_A. ובניסוח מתמטי:

$$I_C = I_A = 1.5(\mathrm{A})$$ **זרם הקבל**

<u>הערה:</u> את הסימן השלילי השמטנו, מאחר והוא רק מציין כיוון, מה שאינו רלוונטי בשאלה זו. עוד נציין כי זרם הקבל סומן כמקובל ב- I_C. אין לבלבל עם זרם החוג השלישי שקיבלנו, המסומן אף הוא ב- I_C.

2. במצב המתמיד הקבל תמיד שקול לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



במצב המתקבל הנגדים R_3 ו- R_4 נמצאים על אותו הענף כך שהם מחוברים בטור. הצומת של U_y אינה "צומת" מבחינה חשמלית, אלא נקודה על הענף. נפתור במילמן:

$$U_x = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{\frac{120}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{15+15}} = 60(\mathrm{V})$$

המתח U_x מתחלק בשווה בין R_3 ו- R_4 (נגדים זהים). מכאן:

$$U_y = U_{R_4} = \frac{U_x}{2} = \frac{60}{2} = 30(\mathrm{V})$$

3.

$$U_C = U_{R_3} = \frac{U_x}{2} = \frac{60}{2} = 30(\mathrm{V})$$

שאלה 7

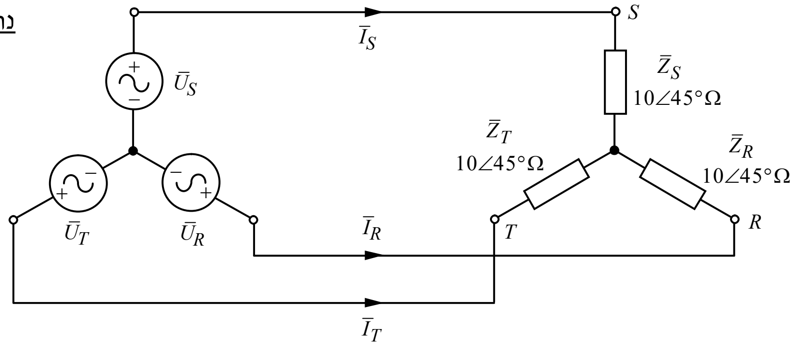
א. "נהפוך אנכית" את המעגל ונשרטטו בצורה נוחה לעבודה:

<u>נתון</u>:

$\bar{U}_R = 230\angle 0°\text{V}$

$\bar{U}_S = 230\angle -120°\text{V}$

$\bar{U}_T = 230\angle -240°\text{V}$



מדובר במעגל תלת פאזי מאוזן, שבו גם המחוללים וגם העכבות בחיבור כוכב. בסוג מעגל זה, המתח על כל עכבה הוא מתח המקור המחובר אליה בטור. מכאן:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_R}{\bar{Z}_R} = \frac{230\angle 0°}{10\angle 45°} = 23\angle -45°(\text{A})$$

$$\bar{I}_S = \frac{\bar{U}_S}{\bar{Z}_S} = \frac{230\angle -120°}{10\angle 45°} = 23\angle -165°(\text{A})$$

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{U}_T}{\bar{Z}_T} = \frac{230\angle -240°}{10\angle 45°} = 23\angle 75°(\text{A})$$

התבקשנו לחשב את המתחים השלובים. אלה המתחים שבין הדקי הכוכב של העכבות. נוכל לחשבם בעזרת מסלולי מתחים בין הנקודות, מסלולים העוברים דרך המקורות בלבד. הנקודות סומנו על גבי האיור בקצות הכוכב של העכבות. מכאן:

$$\bar{U}_{RS} = \bar{U}_R - \bar{U}_S = 230\angle 0° - 230\angle -120° = 398.371\angle 30°(\text{V})$$

$$\bar{U}_{ST} = \bar{U}_S - \bar{U}_T = 230\angle -120° - 230\angle -240° = 398.371\angle -90°(\text{V})$$

$$\bar{U}_{TR} = \bar{U}_T - \bar{U}_R = 230\angle -240° - 230\angle 0° = 398.371\angle 150°(\text{V})$$

ב. את ההספקים במעגל תלת פאזי מאוזן (בכל סוגי החיבור כוכב-משולש) ניתן לחשב תמיד בעזרת הנוסחאות:

$$P_{\text{T}} = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos\phi$$

$$Q_{\text{T}} = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \sin\phi$$

$$S_{\text{T}} = \sqrt{3}\, U_L\, I_L$$

בנוסחאות אלו, U_L הוא גודל מתח הקו – אלה המתחים השלובים אותם חישבנו. I_L הוא זרם הקו – אלה הזרמים אותם חישבנו (המתח והזרם שניהם בערכים יעילים, וללא זווית). הזווית ϕ היא זווית המופע של כל עכבה. ההספקים בנוסחאות אלו הם **ההספקים הכוללים של שלושת העכבות יחד**.

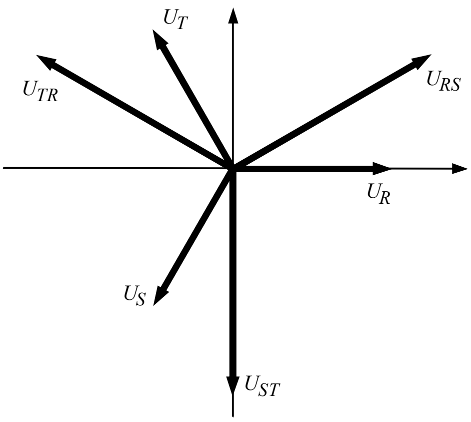
מכאן:

$$P_T = \sqrt{3}\,U_L I_L \cos\phi = \sqrt{3}\cdot 398.371\cdot 23\cdot\cos(45°) = 11221.784(\mathrm{W})$$

$$Q_T = \sqrt{3}\,U_L I_L \sin\phi = \sqrt{3}\cdot 398.371\cdot 23\cdot\sin(45°) = 11221.784(\mathrm{VAR})$$

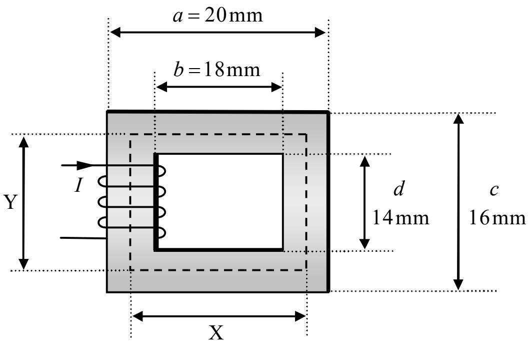
$$S_T = \sqrt{3}\,U_L I_L = \sqrt{3}\cdot 398.371\cdot 23 = 15870(\mathrm{VA})$$

ג.



שאלה 8

א.



עלינו לחשב את האורך הממוצע של הליבה שסומן בקו מקווקו. על פי המידות הנתונות, קו האורך שסומן ב-X הוא הממוצע בין 20mm ל- 18mm :

$$X=\frac{20+18}{2}=19(\text{mm})$$

קו הרוחב שסומן ב-Y הוא הממוצע בין 16mm ל- 14mm :

$$Y=\frac{16+14}{2}=15(\text{mm})$$

נחשב את האורך הממוצע של הליבה :

$$\ell=(X+Y)\times 2=(19\text{mm}+15\text{mm})\times 2=68(\text{mm})=68\times 10^{-3}(\text{m})$$

נרכז את שאר הנתונים :

$$\mu_r=1250$$

$$A=5\left(\text{cm}^2\right)=5\times 10^{-4}\left(\text{m}^2\right)$$

$$N=250$$

נחשב את מיאון הליבה :

$$R_m=\frac{\ell}{\mu_0\mu_r A}=\frac{68\times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}\cdot 1250\cdot 5\times 10^{-4}}=86.580\times 10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

ב. נתון בסעיף זה $I=3\text{A}$. נחשב את גודל השטף :

$$\phi=\frac{F_{mm}}{R_{m_T}}=\frac{NI}{R_m}=\frac{250\cdot 3}{86.580\times 10^3}=8.662(\text{mWb})$$

לגבי כיוונו של השטף – נקודת הכניסה של הזרם לסליל מסומנת באיור. על פי כלל יד ימין לסולנואיד, כיוונו של השטף בליבה הוא **עם כיוון השעון**.

ג.

$$B=\frac{\phi}{A}=\frac{8.662\times 10^{-3}}{5\times 10^{-4}}=17.324(\text{T})$$

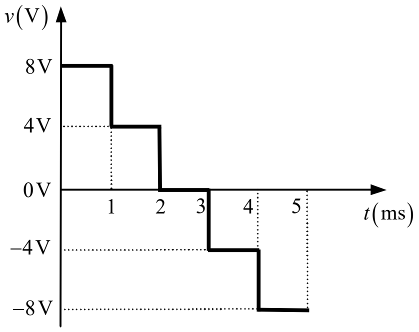
$$H=\frac{B}{\mu_0\mu_r}=\frac{17.324}{4\pi 10^{-7}\cdot 1250}=11029.411\left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right)$$

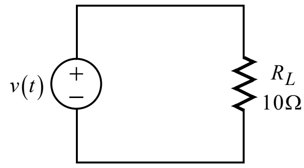
ד.

$$L=\frac{N^2}{R_m}=\frac{250^2}{86.580\times 10^3}=0.721(\text{H})=721.87(\text{mH})$$

<u>שאלה 9</u>

א. נשרטט מחזור אחד של האות הנתון:





כפי שניתן לראות באיור, זמן המחזור של האות הוא $T = 5\mathrm{ms}$. מכאן:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5\times 10^{-3}} = 200(\mathrm{Hz})$$

ב. נציב את הנתונים המתאימים **בנוסחה לערך ממוצע** של אות מחזורי (מכיוון שמדובר בגל ריבועי, ניתן להציב ערכים ישירות למשוואה, מבלי צורך למצוא משוואות ישר תחילה):

$$U_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\left[u(t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{1\mathrm{m}}\left[u_1(t)\right]dt + \int_{1\mathrm{m}}^{2\mathrm{m}}\left[u_2(t)\right]dt + \int_{2\mathrm{m}}^{3\mathrm{m}}\left[u_3(t)\right]dt + \int_{3\mathrm{m}}^{4\mathrm{m}}\left[u_4(t)\right]dt + \int_{4\mathrm{m}}^{5\mathrm{m}}\left[u_5(t)\right]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{5\mathrm{m}}\left(\int_0^{1\mathrm{m}}[8]dt + \int_{1\mathrm{m}}^{2\mathrm{m}}[4]dt + \int_{2\mathrm{m}}^{3\mathrm{m}}[0]dt + \int_{3\mathrm{m}}^{4\mathrm{m}}[-4]dt + \int_{4\mathrm{m}}^{5\mathrm{m}}[-8]dt\right) = 0(\mathrm{V})$$

נציין כי במקרה זה תוצאה זו הייתה צפוייה, שכן הגל הנתון סימטרי לחלוטין סביב הציר האופקי. מכל מקום הצגנו את החישוב כנדרש בבחינה, מה גם שמהלך דומה נצרך לחישוב הערך היעיל, וכפי שנראה מיד. הרחבה על הנושא של "אותות מחזוריים" ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק באותות מחזוריים.

ג. נציב את הנתונים המתאימים **בנוסחה לערך יעיל** של אות מחזורי (הנוסחה דומה לנוסחה הקודמת, אלא שכעת אותות המתח נמצאים בריבוע, ויש שורש על כל המשוואה):

$$U_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\left[u(t)\right]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{1\mathrm{m}}\left[u_1(t)\right]^2 dt + \int_{1\mathrm{m}}^{2\mathrm{m}}\left[u_2(t)\right]^2 dt + \int_{2\mathrm{m}}^{3\mathrm{m}}\left[u_3(t)\right]^2 dt + \int_{3\mathrm{m}}^{4\mathrm{m}}\left[u_4(t)\right]^2 dt + \int_{4\mathrm{m}}^{5\mathrm{m}}\left[u_5(t)\right]^2 dt\right)}$$

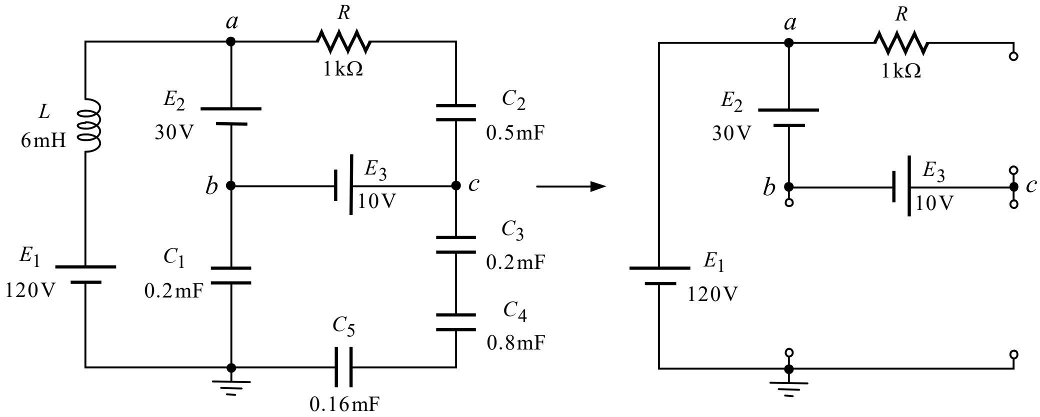
$$= \sqrt{\frac{1}{5\mathrm{m}}\left(\int_0^{1\mathrm{m}}[8]^2 dt + \int_{1\mathrm{m}}^{2\mathrm{m}}[4]^2 dt + \int_{2\mathrm{m}}^{3\mathrm{m}}[0]^2 dt + \int_{3\mathrm{m}}^{4\mathrm{m}}[-4]^2 dt + \int_{4\mathrm{m}}^{5\mathrm{m}}[-8]^2 dt\right)} = \sqrt{32} = 5.656(\mathrm{V})$$

ד. את **ההספק הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת **הערך היעיל**. מכאן:

$$P_{\mathrm{av}} = \frac{U_{\mathrm{rms}}^2}{R} = \frac{5.656^2}{10} = 3.2(\mathrm{W})$$

שאלה 10

א. במצב המתמיד (שהוא "ברירת המחדל" אם לא נאֱמר אחרת) הקבלים שקולים לנֶתק, והסלילים שקולים לקֶצר. נשרטט מעגל שקול:



בצד שמאל של האיור מופיע המעגל הנתון בשאלה. בצד ימין של האיור מובא המעגל המתקבל לאחר קיצור הסליל וניתוק הקבלים. ניתן להיווכח כי במעגל השקול, עקב הנתקים הנוצרים על ידי הקבלים, אין מעגל סגור ולכן הזרם במעגל הוא אפס. נמצא שאין זרם דרך הסליל ולכן אין בו אנרגיה. ובניסוח מתמטי:

$$W_L = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{L \cdot 0^2}{2} = 0(\mathrm{J})$$

ב. נתבונן על האיור שבצד ימין. נחשב את המתחים המבוקשים בעזרת מסלולי מתחים, מהנקודות השונות לאדמה. מכאן:

$$U_a = +E_1 = 120(\mathrm{V})$$

$$U_b = -E_2 + E_1 = -30 + 120 = 90(\mathrm{V})$$

$$U_c = +E_3 - E_2 + E_1 = 10 - 30 + 120 = 100(\mathrm{V})$$

ג. באופן כללי, המתח על כל קבל הוא המתח שבין ההדקים הפתוחים שנותרו לאחר ניתוקו. ננתח את המצב של כל קבל וקבל.

- הקבל C_1:

מסלול מתחים בין הדקיו מראה שהמתח עליו הוא U_b. מכאן:

$$U_{C_1} = U_b = 90(\mathrm{V})$$

- הקבל C_2:

נזכיר שאין זרם במעגל ולכן המתח על הנגד הוא אפס. מסלול מתחים בין הדקיו של C_2 נותן:

$$U_{C_2} = +E_2 - E_2 = 30 - 10 = 20(\mathrm{V})$$

- הקבלים C_{3-5} :

שלושת קבלים אלה מחוברים ביניהם בטור, כך שלא ניתן לבצע מסלול מתחים עבור כל אחד בנפרד (שכן כל מסלול יעבור בהכרח דרך קבל אחר, שאת המתח שלו אנו עדיין לא יודעים). הלכך ננקוט בגישה שונה. נחשב את הקיבול השקול של שלושת הקבלים:

$$C_{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{0.2\mathrm{m}}+\frac{1}{0.8\mathrm{m}}+\frac{1}{0.16\mathrm{m}}\right)^{-1}=0.08(\mathrm{mF})$$

מסלול מתחים בין הדקי הקבל השקול שקיבלנו, מראה שהמתח הכולל של שלושת הקבלים יחד הוא:

$$U_{C_{\mathrm{T}}}=U_c=100(\mathrm{V})$$

נחשב את המטען של הקבל השקול:

$$Q_{C_{\mathrm{T}}}=U_{C_{\mathrm{T}}}\cdot C_{\mathrm{T}}=100\cdot 0.08\mathrm{m}=8(\mathrm{mC})$$

המטען של הקבל השקול שמצאנו, הוא גם המטען של כל אחד מהקבלים המרכיבים אותו (שהרי מטען מתנהג בדומה לזרם בנגדים – הוא זהה עבור קבלים בטור). מכאן:

$$U_{C_3}=\frac{Q_{C_{\mathrm{T}}}}{C_3}=\frac{8\mathrm{m}}{0.2\mathrm{m}}=40(\mathrm{V})$$

$$U_{C_4}=\frac{Q_{C_{\mathrm{T}}}}{C_4}=\frac{8\mathrm{m}}{0.8\mathrm{m}}=10(\mathrm{V})$$

$$U_{C_5}=\frac{Q_{C_{\mathrm{T}}}}{C_5}=\frac{8\mathrm{m}}{0.16\mathrm{m}}=50(\mathrm{V})$$

נחשב כעת את האנרגיה האגורה בכל קבל:

$$W_{C_1}=\frac{C_1\cdot {U_{C_1}}^2}{2}=\frac{0.2\times10^{-3}\cdot 90^2}{2}=0.81(\mathrm{J})$$

$$W_{C_2}=\frac{C_2\cdot {U_{C_2}}^2}{2}=\frac{0.5\times10^{-3}\cdot 20^2}{2}=0.1(\mathrm{J})$$

$$W_{C_3}=\frac{C_3\cdot {U_{C_3}}^2}{2}=\frac{0.2\times10^{-3}\cdot 40^2}{2}=0.16(\mathrm{J})$$

$$W_{C_4}=\frac{C_4\cdot {U_{C_4}}^2}{2}=\frac{0.8\times10^{-3}\cdot 10^2}{2}=0.04(\mathrm{J})$$

$$W_{C_5}=\frac{C_5\cdot {U_{C_5}}^2}{2}=\frac{0.16\times10^{-3}\cdot 50^2}{2}=0.2(\mathrm{J})$$