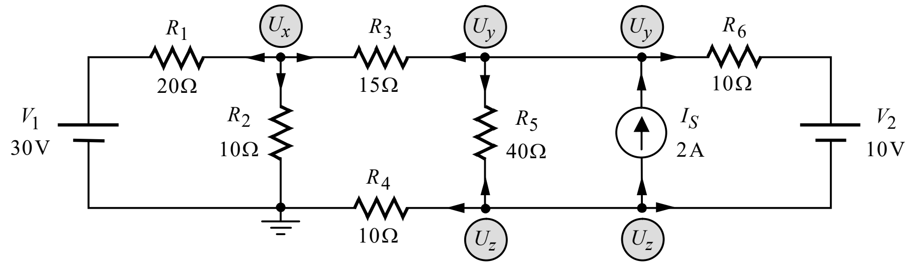
פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – אביב 2025 מועד א׳

שאלה 1

א.



הנחנו כתמיד שכל הזרמים יוצאים מכל צומת וצומת (מלבד הזרם של מקור הזרם שכיוונו נתון). ניתן לשים לב שהמתחים U_y ו- U_z סומנו כל אחד על שתי נקודות במעגל, שכן שתי נקודות שבינהן מפריד רק חוט קצר חסר התנגדות נחשבות לאותה נקודה מבחינה חשמלית. נמצא שכל אחד משני מתחים אלה משותף ל-4 זרמים. נרשום את משוואות הצמתים.

<u>צומת x</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת x:

שלב א׳: $I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות:

שלב ב׳: $$\frac{U_x - V_1}{R_1} + \frac{U_x - 0}{R_2} + \frac{U_x - U_y}{R_3} = 0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳: $$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)U_x - \left(\frac{1}{R_3}\right)U_y - (0)U_z = \frac{V_1}{R_1}$$

נציב ערכים:

שלב ד׳: $$\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right)U_x - \left(\frac{1}{15}\right)U_y - (0)U_z = \frac{30}{20}$$

<u>צומת y</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת y:

שלב א׳: $I'_{R_3} + I_{R_5} - I_S + I_{R_6} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד הזרם בענף של מקור הזרם):

שלב ב׳: $$\frac{U_y - U_x}{R_3} + \frac{U_y - U_z}{R_5} - I_S + \frac{U_y - V_2 - U_z}{R_6} = 0$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו:

שלב ג׳: $$-\left(\frac{1}{R_3}\right)U_x + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_y - \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_z = \frac{V_2}{R_6} + I_S$$

נציב ערכים:

שלב ד׳: $$-\left(\frac{1}{15}\right)U_x + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{40} + \frac{1}{10}\right)U_y - \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{10}\right)U_z = \frac{10}{10} + 2$$

<u>צומת z</u>:

נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור צומת z :

שלב א': $I_{R_4} + I'_{R_5} + I_S + I'_{R_6} = 0$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד הזרם בענף של מקור הזרם) :

שלב ב': $\dfrac{U_z - 0}{R_4} + \dfrac{U_z - U_y}{R_5} + I_S + \dfrac{U_z + V_2 - U_y}{R_6} = 0$

נסדר את המשוואה שקיבלנו :

שלב ג': $-(0)U_x - \left(\dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_6}\right)U_y + \left(\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_6}\right)U_z = -\dfrac{V_2}{R_6} - I_S$

נציב ערכים :

שלב ד': $-(0)U_x - \left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right)U_y + \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right)U_z = -\dfrac{10}{10} - 2$

<u>לסיכום</u>:

קיבלנו שלוש משוואות בשלושה נעלמים :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15}\right)U_x - \left(\dfrac{1}{15}\right)U_y - (0)U_z = \dfrac{30}{20} \\[2ex] -\left(\dfrac{1}{15}\right)U_x + \left(\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right)U_y - \left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right)U_z = \dfrac{10}{10} + 2 \\[2ex] -(0)U_x - \left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right)U_y + \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right)U_z = -\dfrac{10}{10} - 2 \end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן :

$U_x = 12.352\,(\mathrm{V})$

$U_y = 17.647\,(\mathrm{V})$

$U_z = -3.529\,(\mathrm{V})$

ב. הזרם דרך V_1 הוא הזרם דרך R_1. ניעזר בביטוי שרשמנו לזרם זה לעיל בשלב ב' של צומת x, ונחשב את ערכו :

$$I_{V_1} = I_{R_1} = \frac{U_x - V_1}{R_1} = \frac{12.352 - 30}{20} = -0.882\,(\mathrm{A})$$

קיבלנו תוצאה שלילית. הדבר אומר לנו שכיוונו של הזרם הוא הפוך להנחה ההתחלתית. נמצא שהזרם יוצא מההדק החיובי של V_1, ולכן מקור זה **ספק**. נחשב את ההספק שלו :

$$P_{V_1} = V_1 \cdot I_{V_1} = 30 \cdot 0.882 = 26.470\,(\mathrm{W})$$

הזרם דרך V_2 הוא הזרם דרך R_6. ניעזר בביטוי שרשמנו לזרם זה לעיל בשלב ב' של צומת y, ונחשב את ערכו:

$$I_{V_1} = I_{R_6} = \frac{U_y - V_2 - U_z}{R_6} = \frac{17.64 - 10 - (-3.52)}{10} = 1.117(\text{A})$$

כאמור את הביטוי לזרם זה לקחנו ממשוואות צומת y שלגביו הנחנו שכל הזרמים יוצאים מהצומת. קיבלנו תוצאה חיובית, מה שאומר שכיוון הזרם הוא ככיוון ההנחה ההתחלתית. נמצא שהזרם נכנס להדק החיובי של V_2 ולכן מקור זה **צרכן**. נחשב את ההספק שלו:

$$P_{V_2} = V_2 \cdot I_{V_2} = 10 \cdot 1.117 = 11.176\,(\text{W})$$

ג. מקור הזרם נמצא בין U_y ל- U_z. הפוטנציאל בצד ראש החץ – U_y גדול יותר מאשר הפוטנציאל בצד השני, מה שאומר שמקור הזרם **ספק** (ניתן לבחון זאת גם על ידי מסלול מתחים היוצא מראש החץ. נקבל תוצאה חיובית, מה שאומר שמקור הזרם ספק). נחשב את המתח ואת ההספק של מקור הזרם:

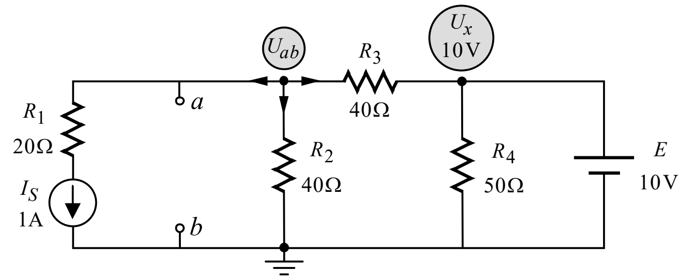
$$U_{I_S} = U_y - U_z = 17.64 - (-3.52) = 21.176\,(\text{V})$$

$$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 21.176 \cdot 2 = 42.352\,(\text{W})$$

שאלה 2

א. **חישוב מתח תבנין:**

נתנק את R_L ונשרטט את המעגל המתקבל:



המתח U_x התקבל על ידי מסלול מאותו צומת של U_x, דרך E, לאדמה. נפתור במתחי צמתים. נרשום את משוואת הזרמים על פי קירכהוף עבור הצומת של U_{ab}:

$$I_S + I_{R_2} + I_{R_3} = 0$$

נבטא את הזרמים כמתח חלקי התנגדות (מלבד הזרם בענף של מקור הזרם):

$$I_S + \frac{U_{ab} - 0}{R_2} + \frac{U_{ab} - U_x}{R_3} = 0$$

מאחר ויש נעלם אחד, ניתן כבר בשלב זה להציב ערכים ולפתור בעזרת מחשבון:

$$1 + \frac{U_{ab} - 0}{40} + \frac{U_{ab} - 10}{40} = 0$$

$$U_{ab} = -15(\mathrm{V})$$

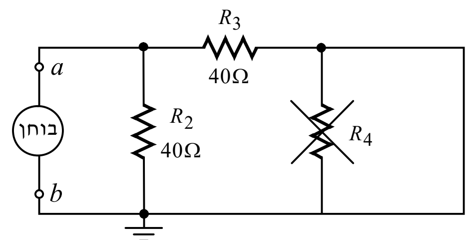
מתח תבנין במקרה זה הוא המתח U_{ab} שחישבנו. ובניסוח מתמטי:

$$E_{\mathrm{Th}} = U_{ab} = -15(\mathrm{V})$$

קיבלנו תוצאה שלילית. הדבר אומר שההדק החיובי של E_{Th} יפנה לנקודה b.

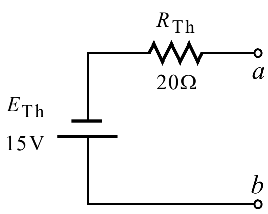
חישוב התנגדות תבנין:

נקצר את מקור המתח, ננתק את מקור הזרם, נניח מקור בוחן בין ההדקים a ו-b ונשרטט מעגל שקול:



$$R_{\mathrm{Th}} = R_2 \parallel R_3 = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40}\right)^{-1} = 20(\Omega)$$

נשרטט את המעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ב. נמצא תחילה את ערך ההספק המרבי. התנאי להעברת הספק מרבי הוא:

$$R_L = R_{Th} = 20(\Omega)$$

נחשב את ההספק המרבי:

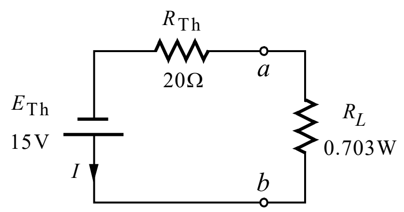
$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{15}{20+20} = 0.375(\text{A})$$

$$P_{R_{L(\max)}} = I^2 \cdot R_L = 0.375^2 \cdot 20 = 2.812(\text{W})$$

רבע מההספק המרבי הוא אפוא:

$$P_{R_L} = \frac{P_{R_{L(\max)}}}{4} = \frac{2.812}{4} = 0.703(\text{W})$$

כעת עלינו לחשב אֵילו ערכים של R_L נותנים הספק זה. ישנם שני ערכים כאלה. נחבר את R_L למעגל תבנין ונציין על גביו את הידוע לנו:



נרשום את מאזן ההספקים של המעגל:

$$P_E = P_{R_{Th}} + P_{R_L}$$

נייצג את ההספקים של המשוואה האחרונה בעזרת נוסחאות ההספקים המוכרות, מלבד ההספק של R_L שערכו ידוע לנו:

$$E_{Th} \cdot I = I^2 \cdot R_{Th} + 0.703$$

נציב ערכים ונסדר את המשוואה בצורה של משוואה ריבועית (נציין כי ערך הזרם שקיבלנו לעיל התקבל עבור $R_L = R_{Th}$ ועבור מצב של הספק מרבי, ולכן הוא אינו רלוונטי כעת):

$$15I = 20I^2 + 0.703$$

$$20I^2 - 15I + 0.703 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שלה שני פתרונות:

$$I_1 \approx 0.7(\text{A})$$

$$I_2 = 50.240(\text{mA})$$

ניעזר בשני פתרונות אלה ובמעגל תבנין שקיבלנו, ונחשב עבורם שני ערכים של R_L:

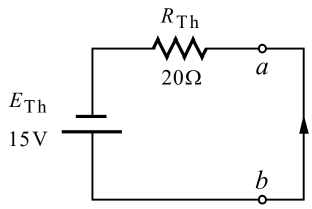
$$P_{R_L} = I_2^2 \cdot R_{L_2} \quad \Rightarrow$$

$$R_{L_2} = \frac{P_{R_L}}{I_2^2} = \frac{0.703}{(50.240\text{m})^2} = 278.56(\Omega)$$

$$P_{R_L} = I_1^2 \cdot R_{L_1} \quad \Rightarrow$$

$$R_{L_1} = \frac{P_{R_L}}{I_1^2} = \frac{0.703}{0.7^2} = 1.43(\Omega)$$

ג. נחבר תיל בין a ל-b במעגל תבנין שקיבלנו:



כיוונו של הזרם הוא מ-b ל-a, זאת בהתאם לכיוונו של E_{Th} אותו קיבלנו. נחשב את גודלו של הזרם:

$$I = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} = \frac{15}{20} = 0.75(\text{A})$$

שאלה 3

א. נרכז נתונים. נתוני תא בודד:

$r = 10(\Omega)$

$E = 1.5(\text{V})$

$Q = 0.2(\text{Ah})$

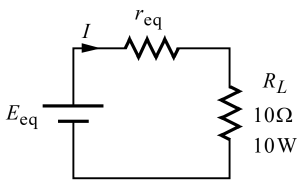
הנתונים הנוגעים למעגל השקול:

$R_L = 10(\Omega)$

$P_{R_L} = 10(\text{W})$

$t = 4(\text{h})$

נשרטט מעגל שקול ונציין על גביו את הידוע לנו:



נחשב את הזרם במעגל:

$$P_{R_L} = I^2 \cdot R_L \quad \Rightarrow$$

$$I = \sqrt{\frac{P_{R_L}}{R_L}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1(\text{A})$$

נחשב את הקיבול השקול בעזרת הנוסחה הבאה:

$$Q_{\text{eq}} = I \cdot t = 1 \cdot 4 = 4(\text{Ah})$$

נחשב את m בעזרת הנוסחה הבאה:

$$Q_{\text{eq}} = m \cdot Q \quad \Rightarrow$$

$$m = \frac{Q_{\text{eq}}}{Q} = \frac{4}{0.2} = 20$$

נחשב כעת את n. מתח המקור שווה למתח שני הנגדים. ובניסוח מתמטי:

$$E_{\text{eq}} = I \cdot r_{\text{eq}} + I \cdot R_L$$

במקום E_{eq} ו- r_{eq} נציב את הנוסחאות שלהם הקשורות לתאים:

$$n \cdot E = I \cdot \frac{n \cdot r}{m} + I \cdot R_L$$

$$n \cdot 1.5 = 1 \cdot \frac{n \cdot 10}{20} + 1 \cdot 10$$

$$n = 10$$

ב. נחשב את E_{eq} ואת ההספק שלו:

$$E_{\text{eq}} = n \cdot E = 10 \cdot 1.5 = 15(\text{V})$$

$$P_{E_{\text{eq}}} = E_{\text{eq}} \cdot I = 15 \cdot 1 = 15(\text{W})$$

נחשב את נצילות המעגל:

$$\eta = \frac{P_{R_L}}{P_{E_{\text{eq}}}} \cdot 100\% = \frac{10}{15} \cdot 100\% = 66.66\%$$

ג. יש לנו כעת שני מערכים של תאים. מערך אחד כולל 19 ענפים $(m=19)$, שעל כל אחד מהם יש 10 תאים $(n=10)$. נחשב את הכא״מ ואת ההתנגדות השקולים של מערך זה:

$$E_{\text{eq}_1} = n \cdot E = 10 \cdot 1.5 = 15(\text{V})$$

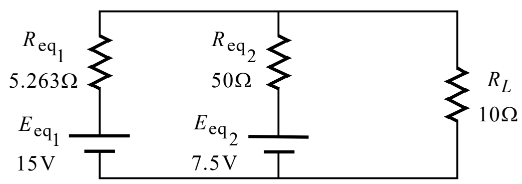
$$r_{\text{eq}_1} = \frac{n \cdot r}{m} = \frac{10 \cdot 10}{19} = 5.263\,(\Omega)$$

מערך שני כולל ענף אחד $(m=1)$, שעליו ישנם 5 תאים $(n=5)$. נחשב את הכא״מ ואת ההתנגדות השקולים של מערך זה:

$$E_{\text{eq}_2} = n \cdot E = 5 \cdot 1.5 = 7.5(\text{V})$$

$$r_{\text{eq}_2} = \frac{n \cdot r}{m} = \frac{5 \cdot 10}{1} = 50(\Omega)$$

נשרטט מעגל שקול:



נפתור במילמן:

$$U_{R_L} = \frac{\frac{E_{\text{eq}_1}}{r_{\text{eq}_1}} + \frac{E_{\text{eq}_2}}{r_{\text{eq}_2}}}{\frac{1}{r_{\text{eq}_1}} + \frac{1}{r_{\text{eq}_2}} + \frac{1}{R_L}} = \frac{\frac{15}{5.263} + \frac{7.5}{50}}{\frac{1}{5.263} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}} = 9.677(\text{V})$$

$$P_{R_L} = \frac{{U_{R_L}}^2}{R_L} = \frac{9.677^2}{10} = 9.365(\text{W})$$

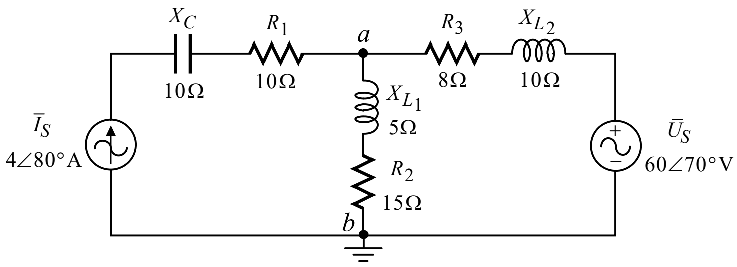
שאלה 4

א. נחשב את ההיגבים של הקבל ושל הסלילים ונשרטט את המעגל המתקבל:

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{10000\cdot 10\mu}=10(\Omega)$$

$$X_{L_1}=\omega L_1=10000\cdot 0.5\text{m}=5(\Omega)$$

$$X_{L_2}=\omega L_2=10000\cdot 1\text{m}=10(\Omega)$$



את נקודה b חיברנו לאדמה. נפתור בעזרת משפט מילמן:

$$\bar{U}_{ab}=\frac{\bar{I}_S+\dfrac{\bar{U}_S}{R_3+jX_{L_2}}}{\dfrac{1}{R_2+jX_{L_1}}+\dfrac{1}{R_3+jX_{L_2}}}=\frac{4\angle 80^\circ+\dfrac{60\angle 70^\circ}{8+j10}}{\dfrac{1}{15+j5}+\dfrac{1}{8+j10}}=55.146\angle 83.31^\circ(\text{V})$$

ב.

$$\bar{I}_{L_2}=\frac{\bar{U}_S-\bar{U}_{ab}}{R_3+jX_{L_2}}=\frac{60\angle 70^\circ-55.146\angle 83.31^\circ}{8+j10}=1.108\angle -44.82^\circ(\text{A})$$

ג.

$$\bar{S}_{U_S}=\bar{U}_S\cdot \bar{I}_{U_S}{}^*=\bar{U}_S\cdot \bar{I}_{L_2}{}^*=(60\angle 70^\circ)(1.108\angle +44.82^\circ)=66.497\angle 114.82^\circ(\text{VA})$$

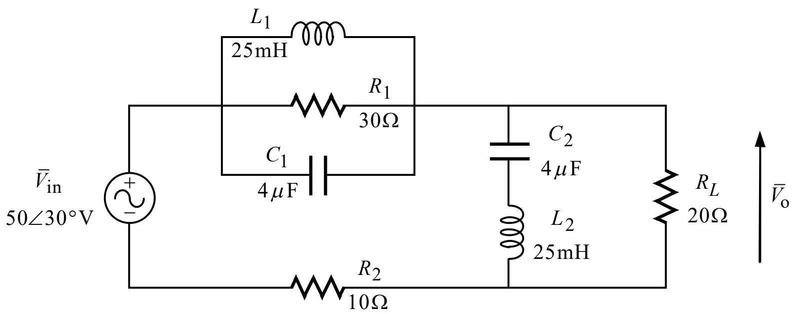
שאלה 5

א. מקור המתח נתון על ידי:

$$v_{\text{in}}(t)=50\sqrt{2}\sin(\omega t+\pi/6)(\text{V})$$

זווית של π ברדיאנים שקולה ל-$180°$. נציג את מתח המקור בהצגה חלקית/פאזורית, ונשרטט את המעגל המתקבל:

$$\bar{V}_{\text{in}}=\frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 180°/6=50\angle 30°(\text{V})$$



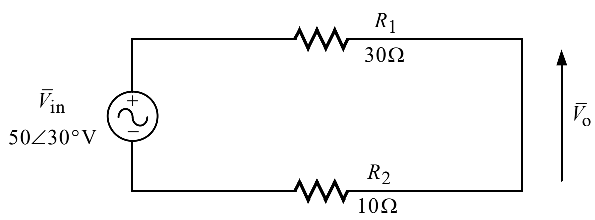
המתח על R_L יהיה אפס במצב של תהודה טורית בין C_2 ו-L_2. במצב זה כידוע הקבל והסליל שקולים לקֶצר, מה שגורם למתח אפס במוצא כנדרש בשאלה. מכאן:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}=\frac{1}{\sqrt{25\text{m}\cdot 4\mu}}=3162.277\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{3162.277}{2\pi}=503.292(\text{Hz})$$

__הערה:__ בתדר שחישבנו הרכיבים C_1 ו-L_1 נמצאים בתהודה **מקבילית אידיאלית**, שהרי יש להם את אותם ערכים כמו של C_2 ו-L_2, ולכן יש להם את אותו תדר תהודה. במצב זה כידוע C_1 ו-L_1 שקולים לנֶתק. נציין כי נתק זה אינו יכול לגרום לבדו למתח אפס במוצא, שהרי יש את הענף שעליו R_1 המאפשר מעבר של זרם ל-R_L. לפיכך רשמנו שדווקא התהודה הטורית תגרום כאן למתח אפס במוצא.

ב. כאמור במצב הנוכחי יש תהודה טורית בין C_2 ו-L_2 והם שקולים לקֶצר. כמו כן יש תהודה מקבילית אידיאלית בין C_1 ו-L_1 והם שקולים לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



$$\bar{I}_{\text{T}}=\frac{\bar{V}_{\text{in}}}{R_1+R_2}=\frac{50\angle 30°}{30+10}=1.25\angle 30°(\text{A})$$

ג. בתדירות הנתונה $\omega = 1000\ \text{rad/s}$ אין תהודה בין הרכיבים במעגל. הלכך את הסעיף הזה והבא אחריו נפתור כמו מעגל AC רגיל שאינו בתהודה. נחשב תחילה את ההיגבים השונים:

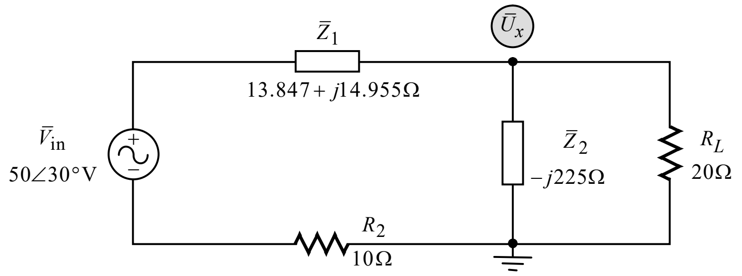
$$X_{L_1} = X_{L_2} = \omega L = 1000 \cdot 25\text{m} = 25(\Omega)$$

$$X_{C_1} = X_{C_2} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 4\mu} = 250(\Omega)$$

נאחד את הרכיבים לעכבות שקולות ונשרטט את המעגל המתקבל:

$$\bar{Z}_1 = \left(\frac{1}{jX_{L_1}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{-jX_{C_1}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{j25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{-j250}\right)^{-1} = 13.847 + j14.955(\Omega)$$

$$\bar{Z}_2 = jX_{L_2} - jX_{C_2} = j25 - j250 = -j225(\Omega)$$



נפתור במילמן:

$$\bar{U}_{R_L} = \bar{U}_x = \frac{\dfrac{\bar{V}_{in}}{\bar{Z}_1 + R_2}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_1 + R_2} + \dfrac{1}{\bar{Z}_2} + \dfrac{1}{R_L}} = \frac{\dfrac{50\angle 30°}{13.847 + j14.955 + 10}}{\dfrac{1}{13.847 + j14.955 + 10} + \dfrac{1}{-j225} + \dfrac{1}{20}} = 21.824\angle 8.11°(\text{V})$$

$$\bar{I}_{R_L} = \frac{\bar{U}_{R_L}}{R_L} = \frac{21.824\angle 8.11°}{20} = 1.091\angle 8.11°(\text{A})$$

ד.

$$\bar{I}_{\text{T}} = \frac{\bar{V}_{in} - \bar{U}_x}{\bar{Z}_1 + R_2} = \frac{50\angle 30° - 21.824\angle 8.11°}{13.847 + j14.955 + 10} = 1.095\angle 13.19°(\text{A})$$

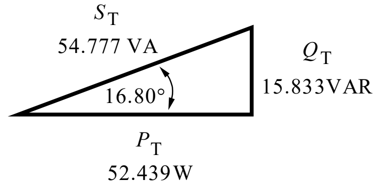
$$\bar{S}_{\text{T}} = \bar{V}_{in} \cdot \bar{I}_{\text{T}}^{\,*} = (50\angle 30°)(1.095\angle -13.19°) = 52.439 + j15.833 = 54.777\angle 16.80°(\text{VA})$$

מכאן:

$$P_{\text{T}} = 52.439(\text{W})$$

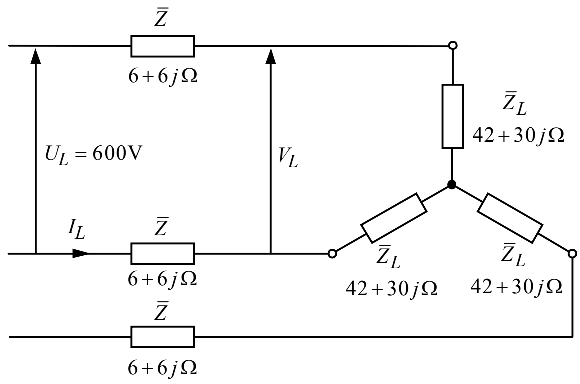
$$Q_{\text{T}} = 15.833(\text{VAR})$$

$$S_{\text{T}} = 54.777(\text{VA})$$



שאלה 6

א. נשרטט את המעגל ונציין על גביו את הידוע לנו:



בכל ענף ניתן לחבר בטור את $\bar{Z}$ עם $\bar{Z}_L$. נסמן את העכבה המתקבלת ב- $\bar{Z}_x$ ונחשב את ערכה:

$$\bar{Z}_x = \bar{Z} + \bar{Z}_L = 6+6j+42+30j = 48+36j = 60\angle 36.86°(\Omega)$$

נתון שמתח הקו הוא 600V. מתח הקו במקרה זה גדול פי $\sqrt{3}$ מהמתח של העכבה **השקולה** $\bar{Z}_x$ שבכל ענף. נחשב את המתח של $\bar{Z}_x$ ואת הזרם דרכה, שהוא זרם הקו המבוקש. מאחר ולא נתונות הזוויות של מתח הקו, נעבוד עם ערכים מוחלטים בלבד (השאלה אינה דורשת תוצאות עם גודל וזווית). המשתנים של הערכים המוחלטים יופיעו ללא קו מעליהם. מכאן:

$$U_{Z_x} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{600}{\sqrt{3}} = 346.41(V)$$

$$I_L = I_{Z_x} = \frac{U_{Z_x}}{Z_x} = \frac{346.41}{60} = 5.773(A)$$

<u>הערה</u>: הרחבה על הנושא של מעגלים תלת מופעיים ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים" (מהדורה שלישית והלאה).

ב. נחשב תחילה את המתח של העכבה $\bar{Z}_L$ בלבד:

$$\bar{Z}_L = 42+30j = 51.613\angle 35.53°(\Omega)$$

$$U_{Z_L} = I_L \cdot Z_L = 5.773 \cdot 51.613 = 297.993(V)$$

המתח המבוקש V_L הוא המתח השלוב של שתי עכבות של העומס. במקרה זה כידוע, המתח השלוב גדול פי $\sqrt{3}$ מהמתח של עכבה בודדת. מכאן:

$$V_L = \sqrt{3} \cdot U_{Z_L} = \sqrt{3} \cdot 297.993 = 516.139\ (V)$$

ג. נציין כי לא ניתן כאן לחשב את ההספקים הכלליים בעזרת הנוסחאות המיוחדות למעגלים תלת פאזיים, שכן נוסחאות אלו מותאמות למעגלים אידיאליים, ללא התנגדות בקווים. הלכך נחשב בעזרת הנוסחאות ה"רגילות" המוכרות ממעגלי AC. מכאן:

$$P_{Z_L} = I_L^2 \cdot R_L = 5.773^2 \cdot 42 = 1400(W)$$

$$Q_{Z_L} = I_L^2 \cdot X_L = 5.773^2 \cdot 30 = 1000\ (VAR)$$

$$S_{Z_L} = I_L^2 \cdot Z_L = 5.773^2 \cdot 51.613 = 1720.465\ (VA)$$

ההספקים שחישבנו הם ההספקים של עכבה בודדת Z_L. בשאלה ביקשו את ההספקים של **העומס**, כלומר את ההספקים הכלליים (למרות שבשאלה ציינו רק עכבה בודדת Z_L, משמע יותר שהכוונה להספקים הכלליים, וכפי המבוקש על פי רוב בסוג שאלות אלו). מאחר ונתוני כל העכבות זהים, ההספקים של שלוש העכבות זהים. מכאן:

$$P_{\mathrm{T}} = 3 \cdot P_{Z_L} = 3 \cdot 1400 = 4200(\mathrm{W})$$

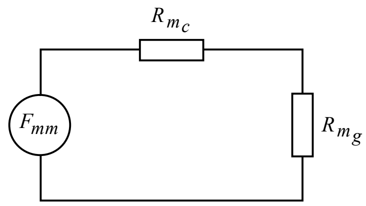
$$Q_{\mathrm{T}} = 3 \cdot Q_{Z_L} = 3 \cdot 1000 = 3000(\mathrm{VAR})$$

$$S_{\mathrm{T}} = 3 \cdot S_{Z_L} = 3 \cdot 1720.465 = 5161.395(\mathrm{VA})$$

<u>שאלה 7</u>

שאלה זו הופיעה כבר באביב 2021 מועד ב', שאלה 9. נפתור בדרך דומה לדרך בה פתרנו שם.

א. המעגל המגנטי שבשאלה הוא מעגל מגנטי טורי, הכולל בכלליות 2 מיאונים – מיאון הליבה ומיאון חריצי האוויר. נציג את "המעגל החשמלי" האנלוגי למעגל המגנטי הנתון:



מיאון **שני** חלקי הליבה סומן ב- R_{m_c} , ומיאון **שני** חריצי האוויר סומן ב- R_{m_g} . **אנו נתייחס לשני חריצי האוויר כחריץ אוויר אחד כללי, בעל אורך כולל של שני החריצים יחד** (וכן כמובן ננהג בשני חלקי הליבה). נרכז נתונים:

$N = 1500$

$\mu_r = 1800$

$A = 2\left(\text{cm}^2\right) = 2\times10^{-4}\left(\text{m}^2\right)$

$\ell_c = 20(\text{cm}) = 20\times10^{-2}(\text{m})$

$\ell_g = 2\times2(\text{mm}) = 4\times10^{-3}(\text{m})$

נחשב את מיאוני המעגל (אנו נוריד מהאורך הכולל ℓ_c , את האורך של שני חריצי האוויר):

$$R_{m_c} = \frac{\ell_c - \ell_g}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{20\times10^{-2} - 4\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot1800\cdot2\times10^{-4}} = 433.255\times10^3\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_g} = \frac{\ell_g}{\mu_0 \cancel{\mu_r} A} = \frac{4\times10^{-3}}{4\pi10^{-7}\cdot2\times10^{-4}} = 15.915\times10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

$$R_{m_\text{T}} = R_{m_c} + R_{m_g} = 433.255\times10^3 + 15.915\times10^6 = 16.348\times10^6\left(\frac{1}{\text{H}}\right)$$

ב. נחשב את השטף ברוויה מגנטית:

$$\phi = BA = 1.6\cdot2\times10^{-4} = 0.32(\text{mWb})$$

נחשב את הזרם הדרוש בסליל בעזרת הקשר:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R_{m_\text{T}}} = \frac{NI}{R_{m_\text{T}}} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{\phi\cdot R_{m_\text{T}}}{N} = \frac{0.32\text{m}\cdot16.348\times10^6}{1500} = 3.487(\text{A})$$

נתון שהתנגדות הסליל היא 5Ω. על פי חוק אום מתקבל:

$$U_\text{DC} = I\cdot R = 3.487\cdot5 = 17.438(\text{V})$$

ג.

$$L = \frac{N^2}{R_{m_T}} = \frac{1500^2}{16.348 \times 10^6} = 0.137(\mathrm{H})$$

ד. זוהי שאלה על **המעגל החשמלי** הכולל את מקור המתח והסליל המחוברים בטור. עבור מקור AC יש לסליל היגב (בנוסף על ההתנגדות הממשית של ה-5Ω). נחשב את היגב הסליל:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi 120 \cdot 0.137 = 103.71(\Omega)$$

נחשב את הזרם דרך הסליל:

$$\bar{I}_{\mathrm{AC}} = \frac{\bar{U}_{\mathrm{AC}}}{R + jX_L} = \frac{110}{5 + j103.71} = 1.059\angle -87.239°(\mathrm{A})$$

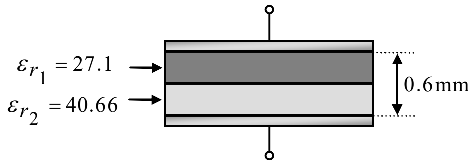
נחשב את ההספק ***הפעיל P*** של מקור המתח. זהו ההספק המתפתח על ההתנגדות הממשית של עכבת הסליל – $R = 5\Omega$. מכאן:

$$P = I_{\mathrm{AC}}{}^2 \cdot R = 1.059^2 \cdot 5 = 5.611(\mathrm{W})$$

שאלה 8

שאלה זו הופיעה כבר באביב 2023 מועד א', שאלה 3. נפתור בדרך דומה לדרך בה פתרנו שם.

א. נתבונן על הקבל C_X:



שני הדיאלקטרונים שבקבל מחוברים זה אחר זה. במצב זה ניתן לראות קבל זה כשני קבלים המחוברים בטור, וכפי המובא בשאלה.

נחשב תחילה את הקיבול של כל שכבה בנפרד. נסדר את הנתונים. שטח הלוחות הינו:

$$A = 0.5\left(\text{cm}^2\right) = 0.5\times10^{-4}\left(\text{m}^2\right)$$

עוד נתון כי לשתי השכבות עובי זהה. מכאן:

$$d_1 = d_2 = \frac{0.6}{2} = 0.3(\text{mm}) = 0.3\times10^{-3}(\text{m})$$

הקבוע הדיאלקטרי היחסי ε_r של כל חומר נתון בשרטוט. מכאן:

$$C_{X_1} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r_1} A}{d_1} = \frac{8.854\times10^{-12}\cdot27.1\cdot0.5\times10^{-4}}{0.3\times10^{-3}} \approx 40(\text{pF})$$

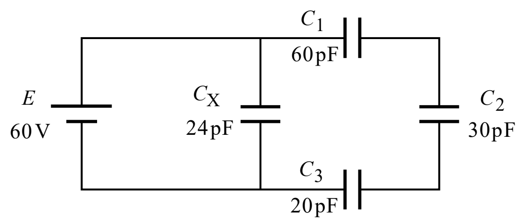
$$C_{X_2} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r_2} A}{d_2} = \frac{8.854\times10^{-12}\cdot40.66\cdot0.5\times10^{-4}}{0.3\times10^{-3}} \approx 60(\text{pF})$$

נחשב את הקיבול השקול של C_X על ידי הנוסחה לחיבור קבלים בטור:

$$C_X = \left(\frac{1}{C_{X_1}} + \frac{1}{C_{X_2}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{40\text{p}} + \frac{1}{60\text{p}}\right)^{-1} = 24(\text{pF})$$

ביאור מלא אודות קבלים שבתוכם סוגים שונים של דיאלקטרונים, ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים", בפרק העוסק בקבל וקיבול.

ב. נשרטט את המעגל המתקבל:



המתח על C_X הוא מתח המקור. מכאן:

$$U_{C_X} = E = 60(\text{V})$$

$$Q_{C_X} = U_{C_X}\cdot C_X = 60\cdot24\text{p} = 1440(\text{pC})$$

נחשב את הקיבול השקול של C_{1-3}:

$$C_{1-3}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{60\text{p}}+\frac{1}{30\text{p}}+\frac{1}{20\text{p}}\right)^{-1}=10(\text{pF})$$

המתח על הקבל השקול C_{1-3} הוא מתח המקור. נחשב את המטען של קבל זה:

$$Q_{C_{1-3}}=E\cdot C_{1-3}=60\cdot 10\text{p}=600(\text{pC})$$

מכיוון שהקבלים C_1, C_2, C_3 מחוברים בטור יש להם מטען זהה. זהו המטען השקול שמצאנו. מכאן:

$$Q_{C_1}=Q_{C_2}=Q_{C_3}=Q_{C_{1-3}}=600(\text{pC})$$

$$U_{C_1}=\frac{Q_{C_1}}{C_1}=\frac{600\text{p}}{60\text{p}}=10(\text{V})$$

$$U_{C_2}=\frac{Q_{C_2}}{C_2}=\frac{600\text{p}}{30\text{p}}=20(\text{V})$$

$$U_{C_3}=\frac{Q_{C_3}}{C_3}=\frac{600\text{p}}{20\text{p}}=30(\text{V})$$

ג.

$$C_{\text{T}}=C_{\text{X}}+C_{1-3}=24\text{p}+10\text{p}=34(\text{pF})$$

$$W_{\text{T}}=\frac{C_{\text{T}}\cdot E^2}{2}=\frac{34\text{p}\cdot 60^2}{2}=61.2(\text{nJ})$$