פתרון מלא לבחינת מה״ט בתורת החשמל – קיץ 2024 מועד ב׳

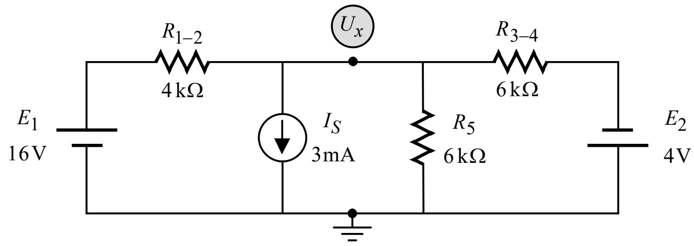
שאלה 1

א. נאחד בין הנגדים המחוברים בטור:

$$R_{1-2}=R_1+R_2=2\text{k}+2\text{k}=4\text{k}(\Omega)$$

$$R_{3-4}=R_3+R_4=4\text{k}+2\text{k}=6\text{k}(\Omega)$$

נשרטט מעגל שקול:



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את U_x:

$$U_x = U_{I_S}=\frac{\frac{E_1}{R_{1-2}}-\frac{E_2}{R_{3-4}}-I_S}{\frac{1}{R_{1-2}}+\frac{1}{R_{3-4}}+\frac{1}{R_5}}=\frac{\frac{16}{4\text{k}}-\frac{4}{6\text{k}}-3\text{m}}{\frac{1}{4\text{k}}+\frac{1}{6\text{k}}+\frac{1}{6\text{k}}}=0.571(\text{V})$$

הערה: הצגנו את המתח של מקור הזרם בערך מוחלט, ללא הקפדה על הסימן. אולם יש לדעת, כי אם נרצה לבחון אם מקור זה הוא ספק או צרכן (נתון זה יידרש בהמשך), עלינו לצאת למסלול מתחים **מההדק של ראש החץ** של מקור הזרם. במקרה זה נקבל כי:

$$U_{I_S}=-U_x=-0.571(\text{V})$$

קיבלנו תוצאה שלילית, מה שאומר שמקור הזרם **צרכן**.

ב. נחשב את ההספק של מקור הזרם:

$$P_{I_S} = U_{I_S}\cdot I_S =0.571\cdot 3\text{m}=1.714(\text{mW})$$

נחשב את הזרם ואת ההספק של E_1:

$$I_{E_1} =\frac{E_1-U_x}{R_{1-2}}=\frac{16-0.571}{4\text{k}}=3.857(\text{mA})$$

$$P_{E_1} = E_1\cdot I_{E_1} =16\cdot 3.857\text{m}=61.714(\text{mW})$$

נחשב את הזרם ואת ההספק של E_2:

$$I_{E_2} =\frac{E_2+U_x}{R_{3-4}}=\frac{4+0.571}{6\text{k}}=0.761(\text{mA})$$

$$P_{E_2} = E_2\cdot I_{E_2} =4\cdot 0.761\text{m}=3.047(\text{mW})$$

ג. לצורך עריכת מאזן הספקים עלינו לדעת תחילה מי ספק ומי צרכן. לגבי הנגדים – הם תמיד צרכנים. לגבי מקור הזרם – ראינו בסעיף א׳ כי הוא **צרכן**. לגבי E_1 – ערכו גדול מערכו של U_x, מה שאומר שהזרם יוצא מההדק החיובי שלו ולכן הוא **ספק**. לגבי E_2 – אם נתבונן על R_{3-4} נראה כי מצד אחד יש את U_x ומצד שני יש פוטנציאל של ההדק השלילי של E_2. נמצא שהפוטנציאל בהדק השמאלי של R_{3-4} גדול מאשר בצד השני, מה שאומר שהזרם זורם ימינה. נמצא שהזרם יוצא מההדק החיובי של E_2 ולכן מקור זה **ספק**. את הספקי המקורות חישבנו לעיל. נחשב את הספקי הנגדים:

$$P_{R_{1-2}} = {I_{E_1}}^2 \cdot R_{1-2} = (3.857\text{m})^2 \cdot 4\text{k} = 59.510(\text{mW})$$

$$P_{R_{3-4}} = {I_{E_2}}^2 \cdot R_{3-4} = (0.761\text{m})^2 \cdot 6\text{k} = 3.482(\text{mW})$$

$$P_{R_5} = \frac{{U_x}^2}{R_5} = \frac{0.571^2}{6\text{k}} = 0.054(\text{mW})$$

נערוך מאזן הספקים למעגל:

$\sum P$ **מושקע** $= \sum P$ **נצרך**

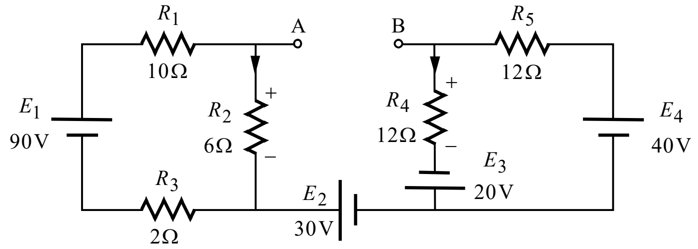
$$P_{E_1} + P_{E_2} = P_{I_S} + P_{R_{1-2}} + P_{R_{3-4}} + P_{R_5}$$

$$61.714\text{m} + 3.047\text{m} = 1.714\text{m} + 59.510\text{m} + 3.482\text{m} + 0.054\text{m}$$

$$64.761\text{mW} = 64.761\text{mW}$$

שאלה 2

א. **חישוב מתח תבנין:**



הנתק שיש בין A ל-B גורם לכך שלא עובר זרם מחלקו הימני של המעגל לחלקו השמאלי ולהיפך, כך ששני חלקי המעגל מתפקדים למעשה כשני מעגלים נפרדים. המתח E_{Th} הוא המתח בין A ל-B. נחשבו בעזרת מסלול מתחים בין הנקודות, מסלול העובר דרך R_2 ו- R_4. כיווני הזרמים בכל מעגל סומנו מראש על גבי השרטוט. מכך נגזרו כיווני הקוטביות של מתחי הנגדים (סומנו באיור. נזכיר שבנגדים נקודת הכניסה של הזרם מקבלת סימן "פלוס"). ניעזר בכלל מחלק המתח ונחשב את המתח של R_2 :

$$U_{R_2} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_{1-3} + R_2} = \frac{90 \cdot 6}{10+2+6} = 30(\text{V})$$

במעגל הימני שני המקורות פועלים באותו הכיוון, ולכן המתח השקול יתקבל מסכום מתחי המקורות. הנגדים R_4 ו- R_5 זהים. מכאן:

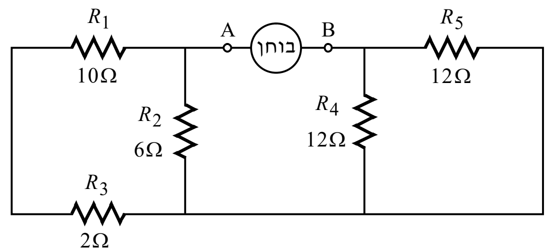
$$U_{R_4} = \frac{E_3 + E_4}{2} = \frac{20+40}{2} = 30(\text{V})$$

נחשב את מתח תבנין:

$$E_{Th} = U_{AB} = +U_{R_2} + E_2 + E_3 - U_{R_4} = 30+30+20-30 = 50(\text{V})$$

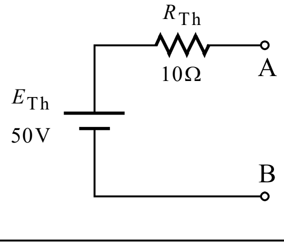
חישוב התנגדות תבנין:

נקצר את מקורות המתח, נניח מקור בוחן בין ההדקים A ו-B ונשרטט מעגל שקול:



$$R_{Th} = \left(\frac{1}{R_1+R_3} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10+2} + \frac{1}{6}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)^{-1} = 10(\Omega)$$

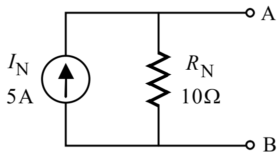
נשרטט את מעגל תבנין המתקבל כנדרש בשאלה:



ב. ניעזר בהמרת מקורות ונמיר את מעגל תבנין שקיבלנו למעגל נורטון:

$$R_{\text{N}} = R_{\text{Th}} = 10(\Omega)$$

$$I_{\text{N}} = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} = \frac{50}{10} = 5(\text{A})$$



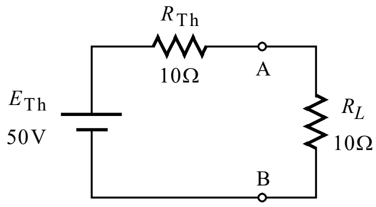
ג. התנאי להעברת הספק מרבי הינו:

$$R_L = R_{\text{Th}} = 10(\Omega)$$

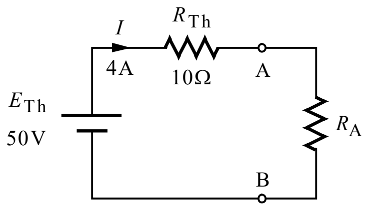
נחבר את נגד העומס למעגל תבנין שקיבלנו ונחשב את ההספק שלו (ניתן כמובן לחברו גם למעגל נורטון. התוצאה שנקבל תהא זהה):

$$I = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{50}{10+10} = 2.5(\text{A})$$

$$P_{R_L} = I^2 \cdot R_L = 2.5^2 \cdot 10 = 62.5(\text{W})$$



ד. נייצג את האמפרמטר על ידי התנגדותו הפנימית R_{A}, ונחברו למעגל תבנין שקיבלנו:

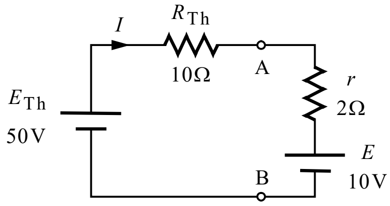


נתון שבמצב זה זורם זרם של 4A דרך האמפרמטר, וכפי המצויין על גבי השרטוט. מכאן:

$$R_{\text{T}} = \frac{E_{\text{Th}}}{I} = \frac{50}{4} = 12.5(\Omega)$$

$$R_{\text{A}} = R_{\text{T}} - R_{\text{Th}} = 12.5 - 10 = 2.5(\Omega)$$

ה. נחבר את המצבר למעגל תבנין שקיבלנו:

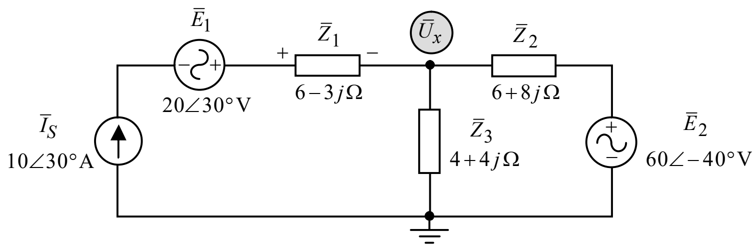


במעגל המתקבל שני המקורות מנוגדים אחד לשני. המקור E_{Th} גדול מהמקור E ולכן הזרם זורם בכיוון המתואר על גבי השרטוט. נמצא שהזרם זורם לתוך ההדק החיובי של המקור E ולכן מקור זה **במצב טעינה** (כלומר הוא צרכן). נחשב את הזרם דרכו:

$$I = \frac{E_{\text{Th}} - E}{R_{\text{Th}} + r} = \frac{50-10}{10+2} = 3.333(\text{A})$$

שאלה 3

א.



ניעזר במשפט מילמן ונחשב את $\bar{U}_{Z_3}$, שהוא למעשה המתח $\bar{U}_x$:

$$\bar{U}_{Z_3} = \bar{U}_x = \frac{\bar{I}_S + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}}{\frac{1}{\bar{Z}_3}+\frac{1}{\bar{Z}_2}} = \frac{10\angle 30° + \frac{60\angle -40°}{6+8j}}{\frac{1}{4+4j}+\frac{1}{6+8j}} = 30.388\angle 41.15°(\text{V})$$

ביאור: בענף השמאלי יש מקור זרם בטור למקור המתח $\bar{E}_1$. במקרה זה במשפט מילמן (וגם במתחי צמתים) מקור המתח $\bar{E}_1$ לא ייכנס כלל למשוואה, שהרי הזרם באותו הענף נקבע על ידי מקור הזרם לבדו. כמו כן העכבה $\bar{Z}_1$ שבטור למקור הזרם לא תיכנס כלל למשוואה (הרחבה על היסודות עליהם מושתת משפט מילמן ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים").

ב. נצא למסלול מתחים מראש החץ של מקור הזרם. הזרם של $\bar{Z}_1$ הוא $\bar{I}_S$. מכך נגזרה גם קוטביות המתח של $\bar{Z}_1$ שסומנה מראש באיור. מכאן :

$$\bar{U}_{I_S} = -\bar{E}_1 + \bar{U}_{Z_1} + \bar{U}_x = -20\angle 30° + (10\angle 30°)(6-3j) + 30.388\angle 41.15° = 73.864\angle 10.93°(\text{V})$$

ג.

$$\bar{S}_{I_S} = \bar{U}_{I_S}\cdot \bar{I}_S{}^* = (73.864\angle 10.93°)(10\angle -30°) = 698.148-241.219j = 738.645\angle -19.06°(\text{VA})$$

מכאן :

$$P_{I_S} = 698.148(\text{W})$$

$$Q_{I_S} = 241.219(\text{VAR})$$

$$S_{I_S} = 738.645(\text{VA})$$

שאלה 4

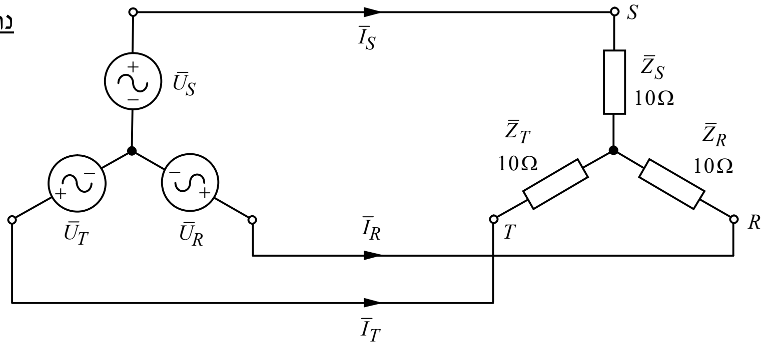
א. "נהפוך אנכית" את המעגל ונשרטטו בצורה נוחה לעבודה:

<u>נתון</u>:

$\bar{U}_R = 230\angle 0° \text{V}$

$\bar{U}_S = 230\angle -120° \text{V}$

$\bar{U}_T = 230\angle -240° \text{V}$



מדובר במעגל תלת פאזי מאוזן, שבו גם המחוללים וגם העכבות בחיבור כוכב. בסוג מעגל זה, המתח על כל עכבה הוא מתח המקור המחובר אליה בטור. מכאן:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_R}{\bar{Z}_R} = \frac{230\angle 0°}{10} = 23\angle 0° (\text{A})$$

$$\bar{I}_S = \frac{\bar{U}_S}{\bar{Z}_S} = \frac{230\angle -120°}{10} = 23\angle -120° (\text{A})$$

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{U}_T}{\bar{Z}_T} = \frac{230\angle -240°}{10} = 23\angle -240° (\text{A})$$

התבקשנו לחשב את המתחים השלובים. אלה המתחים שבין הדקי הכוכב של העכבות. נוכל לחשבם בעזרת מסלולי מתחים בין הנקודות, מסלולים העוברים דרך המקורות בלבד. הנקודות סומנו על גבי האיור בקצות הכוכב של העכבות. מכאן:

$$\bar{U}_{RS} = \bar{U}_R - \bar{U}_S = 230\angle 0° - 230\angle -120° = 398.371\angle 30° (\text{V})$$

$$\bar{U}_{ST} = \bar{U}_S - \bar{U}_T = 230\angle -120° - 230\angle -240° = 398.371\angle -90° (\text{V})$$

$$\bar{U}_{TR} = \bar{U}_T - \bar{U}_R = 230\angle -240° - 230\angle 0° = 398.371\angle 150° (\text{V})$$

ב. את ההספקים במעגל תלת פאזי מאוזן (בכל סוגי החיבור כוכב-משולש) ניתן לחשב תמיד בעזרת הנוסחאות:

$$P_{\text{T}} = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos\phi$$

$$Q_{\text{T}} = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \sin\phi$$

$$S_{\text{T}} = \sqrt{3}\, U_L\, I_L$$

בנוסחאות אלו, U_L הוא גודל מתח הקו – אלה המתחים השלובים אותם חישבנו. I_L הוא זרם הקו – אלה הזרמים אותם חישבנו (המתח והזרם שניהם בערכים יעילים, וללא זווית). הזווית ϕ היא זווית המופע של כל עכבה. ההספקים בנוסחאות אלו הם **ההספקים הכוללים של שלושת העכבות יחד**.

מכאן:

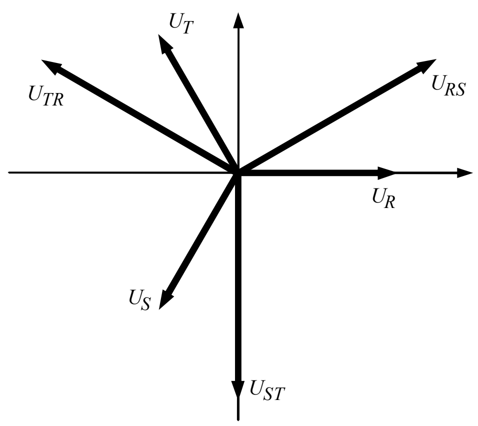
$$P_{\text{T}}=\sqrt{3}\,U_L\,I_L\cos\phi=\sqrt{3}\cdot 398.371\cdot 23\cdot\cos(0°)=15870(\text{W})$$

$$Q_{\text{T}}=\sqrt{3}\,U_L\,I_L\sin\phi=\sqrt{3}\cdot 398.371\cdot 23\cdot\sin(0°)=0(\text{VAR})$$

$$S_{\text{T}}=\sqrt{3}\,U_L\,I_L=\sqrt{3}\cdot 398.371\cdot 23=15870(\text{VA})$$

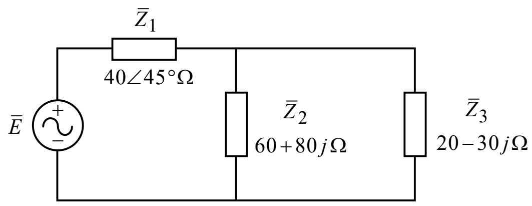
ביאור: קיבלנו שההספק ההיגבי Q_{T} של המערכת הוא אפס. תוצאה זו הייתה צפוייה שכן הספק זה הוא ההספק של החלק המדומה של העכבות, ואילו בשאלה זו העכבות מורכבות מחלק ממשי בלבד, ללא חלק מדומה (במקרה שלנו כל ההספק S_{T} שווה להספק P_{T}).

ג.



<u>שאלה 5</u>

א.



נתון שההספק הממשי של $\bar{Z}_2$ הוא 240W. ההספק **הממשי** הוא ההספק של החלק **הממשי** של $\bar{Z}_2$. מכאן:

$$P_{Z_2} = I_{Z_2}{}^2 \cdot R_{(Z_2)} \quad \Rightarrow$$

$$I_{Z_2} = \sqrt{\frac{P_{Z_2}}{R_{(Z_2)}}} = \sqrt{\frac{240}{60}} = 2(\mathrm{A})$$

נקבע לזרם זה זווית של אפס כנדרש בשאלה (במעגלי AC, אם אין זווית נתונה לאף גודל, ניתן לקבוע זווית כרצוננו לגודל הראשון שאיתו נעבוד). מכאן:

$$\bar{I}_{Z_2} = 2\angle 0°(\mathrm{A})$$

נחשב את המתח של $\bar{Z}_2$:

$$\bar{U}_{Z_2} = \bar{I}_{Z_2} \cdot \bar{Z}_2 = (2\angle 0°)(60+80j) = 200\angle 53.13°(\mathrm{V})$$

ב.

$$\bar{U}_{Z_3} = \bar{U}_{Z_2} = 200\angle 53.13°(\mathrm{V})$$

$$\bar{I}_{Z_3} = \frac{\bar{U}_{Z_3}}{\bar{Z}_3} = \frac{200\angle 53.13°}{20-30j} = 5.547\angle 109.44°(\mathrm{A})$$

$$\bar{I}_{\mathrm{T}} = \bar{I}_{Z_2} + \bar{I}_{Z_3} = 2\angle 0° + 5.547\angle 109.44° = 5.233\angle 88.31°(\mathrm{A})$$

$$\bar{U}_{Z_1} = \bar{I}_{\mathrm{T}} \cdot \bar{Z}_1 = (5.233\angle 88.31°)(40\angle 45°) = 209.321\angle 133.31°(\mathrm{V})$$

$$\bar{E} = \bar{U}_{Z_1} + \bar{U}_{Z_2} = 209.321\angle 133.31° + 200\angle 53.13° = 313.190\angle 94.32°(\mathrm{V})$$

ג.

$$\bar{S}_{\mathrm{T}} = \bar{E} \cdot \bar{I}_{\mathrm{T}}^{*} = (313.190\angle 94.32°)(5.233\angle -88.31°) =$$

$$= 1629.938 + 171.476j = 1638.933\angle 6.00°(\mathrm{VA})$$

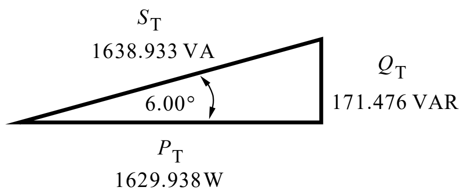
מכאן:

$$P_{\mathrm{T}} = 1629.938(\mathrm{W})$$

$$Q_{\mathrm{T}} = 171.476(\mathrm{VAR})$$

$$S_{\mathrm{T}} = 1638.933(\mathrm{VA})$$

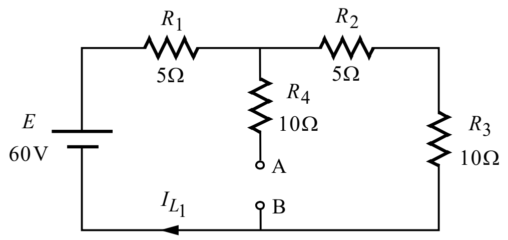
ד.



$$PF = \cos\phi = \cos(6.00°) = 0.994$$

שאלה 6

א. במצב המתמיד הקבל שקול לנֶתק והסליל שקול לקֶצר. נשרטט מעגל שקול:



קיבלנו מעגל טורי פשוט. מכאן:

$$I=\frac{E}{R_1+R_2+R_3}=\frac{60}{5+5+10}=3(\mathrm{A})$$

$$W_{L_1}=\frac{L_1\cdot {I_{L_1}}^2}{2}=\frac{8\times10^{-3}\cdot3^2}{2}=0.036(\mathrm{J})=36(\mathrm{mJ})$$

ב. המתח על הקבל הוא המתח בין A ל-B. מכאן:

$$U_C=U_{\mathrm{AB}}=U_{R_{2-3}}=I(R_2+R_3)=3(5+10)=45(\mathrm{V})$$

$$W_C=\frac{C\cdot {U_C}^2}{2}=\frac{300\times10^{-6}\cdot45^2}{2}=0.303(\mathrm{J})=303.75(\mathrm{mJ})$$

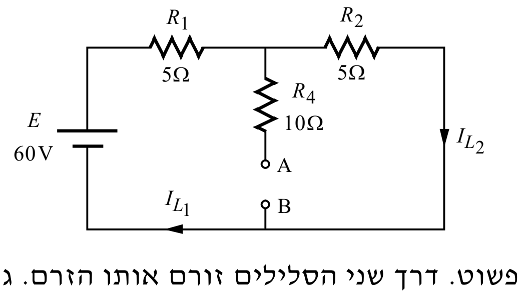
ג. ראוי לציין בהקשר לסעיף זה, כי אנרגיה "אגורה" היא האנרגיה בסליל ובקבל. אנרגיה "נצרכת" זו האנרגיה שמתבזבזת בנגדים. במקרה שלנו מדובר על אנרגיה **נצרכת** של הנגדים (גם הזמן הנתון בסעיף מעיד על כך שלא מדובר באנרגיה של קבלים וסלילים). נחשב תחילה את ההספק של כל הנגדים. זהו למעשה ההספק של מקור המתח. מכאן:

$$P_{\mathrm{T}}=E\cdot I=60\cdot3=180(\mathrm{W})=0.18(\mathrm{kW})$$

התבקשנו להציג את האנרגיה ביחידות של kWh, ולכן מראש העברנו את ההספק ליחידת המדידה kW. נחשב את האנרגיה:

$$W_{\mathrm{T}}=P_{\mathrm{T}}\cdot t=0.18\cdot10=1.8(\mathrm{kWh})$$

ד. במצב המתמיד תמיד הקבלים שקולים לנֶתק והסלילים שקולים לקֶצר. הקצר הנוצר על ידי L_2 גורם לקיצורו של R_3. נשרטט מעגל שקול:



שוב קיבלנו מעגל טורי פשוט. דרך שני הסלילים זורם אותו הזרם. גם ההשראות של שניהם שווה. לכן גם האנרגיות שלהם שוות.

מכאן:

$$I=\frac{E}{R_1+R_2}=\frac{60}{5+5}=6(\mathrm{A})$$

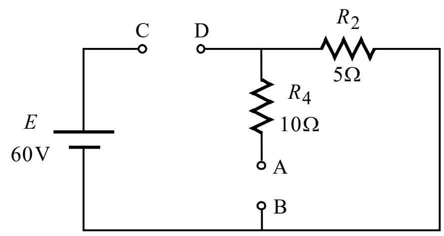
$$W_{L_1}=W_{L_2}=\frac{L\cdot {I_L}^2}{2}=\frac{8\times10^{-3}\cdot6^2}{2}=0.144(\mathrm{J})=144(\mathrm{mJ})$$

נחשב את המתח ואת האנרגיה של הקבל:

$$U_C=U_{\mathrm{AB}}=U_{R_2}=I\cdot R_2=6\cdot5=30(\mathrm{V})$$

$$W_C=\frac{C\cdot {U_C}^2}{2}=\frac{300\times10^{-6}\cdot30^2}{2}=0.135(\mathrm{J})=135(\mathrm{mJ})$$

ה. נשרטט מעגל תמורה למצב המתמיד:

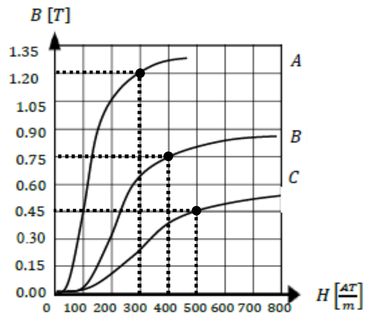


המעגל המתקבל אינו מעגל סגור ולכן לא זורם בו זרם. המתח על C_x הוא המתח בין הנקודות C ו-D. מסלול מתחים בין נקודות אלו נותן:

$$U_{C_x}=E=60(\mathrm{V})$$

שאלה 7

א. **הקדמה לשאלה:** מדובר במעגל מגנטי טורי. במעגל טורי השטף ϕ זהה בכל חלקי הליבה. נתון בשאלה ששטח החתך A אחיד בכל חלקי הליבה. מכאן שגם צפיפות השדה B צריכה להיות זהה בכל חלקי הליבה, שהרי B נתון על ידי $B=\phi/A$. מסקנה זו סותרת את נתוני השאלה הנוספים – $H_{\mathrm{A}}=300(\mathrm{A/m})$, $H_{\mathrm{B}}=400(\mathrm{A/m})$, $H_{\mathrm{C}}=500(\mathrm{A/m})$. נבאר זאת בקצרה. נתבונן על עקום המגנוט הנתון:



בעקום המוצג סימנו את ערכי B, המתאימים לערכי H הנתונים. ניתן להיווכח כי מתקבל B שונה עבור כל חומר, דבר שלא ייתכן מבחינה פיזיקלית, וכפי שהערנו לעיל. כלומר יש טעות בנתוני השאלה. אנו מכל מקום נפתור כאן בהתאם לכוונת כותב השאלה, על מנת להציג פתרון כלשהו.

ידוע הקשר:

$$B=\mu_0\mu_r H$$

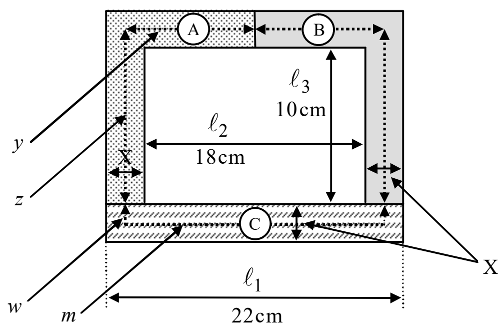
נחלץ את μ_r מהנוסחה ונחשב את ערכו עבור כל אחד מהחומרים:

$$\mu_{r_{\mathrm{A}}}=\frac{B_{\mathrm{A}}}{\mu_0 H_{\mathrm{A}}}=\frac{1.2}{4\pi 10^{-7}\cdot 300}=3183.098$$

$$\mu_{r_{\mathrm{B}}}=\frac{B_{\mathrm{B}}}{\mu_0 H_{\mathrm{B}}}=\frac{0.75}{4\pi 10^{-7}\cdot 400}=1492.077$$

$$\mu_{r_{\mathrm{C}}}=\frac{B_{\mathrm{C}}}{\mu_0 H_{\mathrm{C}}}=\frac{0.45}{4\pi 10^{-7}\cdot 500}=716.197$$

ב. נחשב את המידות של כל חלק. נשרטט את המעגל הנתון:



על מנת שהפתרון יהיה מובן, הענקנו שמות נוחים למידות השונות של הליבה. נחשב תחילה את שטח החתך. נתון ששטח החתך הוא ריבוע, והוא זהה בכל החלקים. נחשב את הרוחב X המסומן באיור, ואת שטח החתך:

$$\mathrm{X}=\frac{\ell_1-\ell_2}{2}=\frac{22-18}{2}=2(\mathrm{cm})$$

$$A=\mathrm{X}\cdot\mathrm{X}=2\cdot2=4\left(\mathrm{cm}^2\right)=4\times10^{-4}\left(\mathrm{m}^2\right)$$

ניגש כעת לחישוב אורכי החלקים השונים. בשרטוט לעיל חילקנו את מסלול השטף בליבה (המסלול הממוצע) לקטעים שונים. נחשב את אורכו של כל אחד מהקטעים m, w, z, y:

$$y=\frac{1}{2}\ell_2+\frac{1}{2}\mathrm{X}=9+1=10(\mathrm{cm})$$

$$z=\frac{1}{2}\mathrm{X}+\ell_3=1+10=11(\mathrm{cm})$$

$$w=\frac{1}{2}\mathrm{X}=1(\mathrm{cm})$$

$$m=\ell_1-\frac{1}{2}\mathrm{X}-\frac{1}{2}\mathrm{X}=22-1-1=20(\mathrm{cm})$$

נחשב את אורכו של חלק A, שהוא גם אורכו של חלק B (נתון בשאלה שהם זהים):

$$\ell_{\mathrm{A}}=\ell_{\mathrm{B}}=y+z=10+11=21(\mathrm{cm})=21\times10^{-2}(\mathrm{m})$$

נחשב את אורכו של חלק C:

$$\ell_{\mathrm{C}}=m+2w=20+2\cdot1=22(\mathrm{cm})=22\times10^{-2}(\mathrm{m})$$

נחשב את המיאון של כל חלק ואת המיאון השקול של המעגל:

$$R_{m_{\mathrm{A}}}=\frac{\ell_{\mathrm{A}}}{\mu_0\mu_{r_{\mathrm{A}}}A}=\frac{21\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot3183.098\cdot4\times10^{-4}}=131.25\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_{\mathrm{B}}}=\frac{\ell_{\mathrm{B}}}{\mu_0\mu_{r_{\mathrm{B}}}A}=\frac{21\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot1492.077\cdot4\times10^{-4}}=280\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_{\mathrm{C}}}=\frac{\ell_{\mathrm{C}}}{\mu_0\mu_{r_{\mathrm{C}}}A}=\frac{22\times10^{-2}}{4\pi10^{-7}\cdot716.197\cdot4\times10^{-4}}=611.111\times10^3\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

$$R_{m_{\mathrm{T}}}=R_{m_{\mathrm{A}}}+R_{m_{\mathrm{B}}}+R_{m_{\mathrm{C}}}=131.25\times10^3+280\times10^3+611.111\times10^3=1.022\times10^6\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right)$$

ג. כפי שהערנו לעיל, יש טעות בנתוני השאלה. לכל חלק יש B שונה, מה שנותן במקרה שלנו שטף ϕ שונה בכל חלק, מה שאינו נכון בליבה טורית, שבה תמיד השטף זהה בכל המסלול. אילו אכן היה שטף אחיד, אזי היינו יכולים לחשב את הזרם בעזרת הקשר הידוע:

$$\phi = \frac{NI}{R_{m_{\mathrm{T}}}}$$

נפתור בעזרת חוק המתחים למעגלים מגנטיים (שהוא אינו עושה שימוש ב- ϕ). מכאן:

$$\Sigma NI = \Sigma H\ell$$

$$NI = \left(H\ell\right)_{\mathrm{A}} + \left(H\ell\right)_{\mathrm{B}} + \left(H\ell\right)_{\mathrm{C}}$$

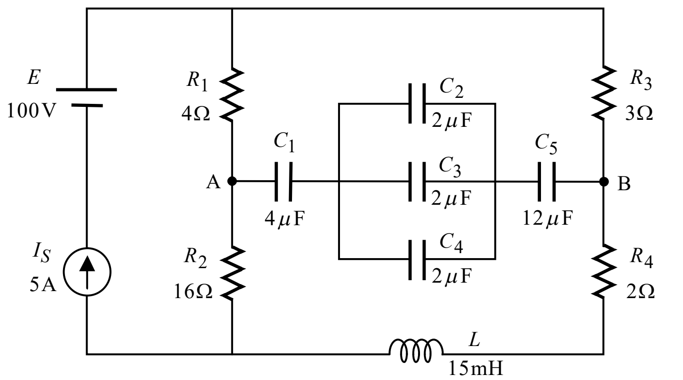
$$800I = \left(300\cdot 21\times 10^{-2}\right) + \left(400\cdot 21\times 10^{-2}\right) + \left(500\cdot 22\times 10^{-2}\right)$$

$$I = 0.321\left(\mathrm{A}\right) = 321.25\left(\mathrm{mA}\right)$$

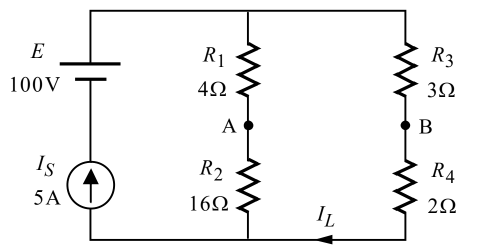
<u>הערה</u>: בדרך שבה פתרנו סעיף זה עשינו שימוש רק בנתוני H ו- ℓ שבשאלה. **מבחינה עקרונית פתרון זה נכון מבחינה פיזיקלית**, שכן H אכן לרוב שונה מחומר לחומר (גם בליבה טורית, שהרי הוא נתון על ידי $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$). רוצה לומר – בנתוני H שונים בליבה טורית אין שום בעיה. הבעיה מתחילה בשימוש בנתונים הנוספים – **נתון** שטח חתך A אחיד לכל הליבה, מה שאומר שגם B צריך להיות זהה בכל החלקים, וכפי שהערנו בתחילת השאלה, אולם זה נסתר מעקום המגנוט **הנתון** שממנו עולה שיש B שונה בכל חלק. כלומר הבעיה כאן עולה רק כאשר מתקדמים לחישובי B (או ϕ), מהלך שהיה נדרש בסעיף א', וכן בסעיף ב' שמסתמך עליו. הרחבה על מושגים אלה ניתן למצוא בספרנו "תורת החשמל להנדסאים".

<u>שאלה 8</u>

א. נשרטט את המעגל הנתון :



במצב המתמיד (שהוא ברירת המחדל אם לא נאֱמר אחרת), הסליל שקול לקֶצר, והקבלים שקולים לנֶתק. נשרטט מעגל שקול :



כאשר מקור זרם ומקור מתח מחוברים בטור על אותו הענף, מקור הזרם ״מנצח״. כלומר הוא קובע את גודל הזרם דרך הענף. ניעזר בכלל מחלק הזרם ונחשב את זרמי הענפים :

$$I_{R_{1-2}} = \frac{I_S \cdot R_{3-4}}{R_{1-2}+R_{3-4}} = \frac{5(3+2)}{4+16+3+2} = 1(\mathrm{A})$$

$$I_{R_{3-4}} = I_{\mathrm{T}} - I_{R_{1-2}} = 5-1 = 4(\mathrm{A})$$

נחשב את האנרגיה האגורה בסליל :

$$W_L = \frac{L \cdot {I_{R_{3-4}}}^2}{2} = 4\frac{\left(15\times10^{-3}\right)4^2}{2} = 0.12(\mathrm{J})$$

נחשב את המתח בין A ל-B :

$$U_{R_2} = I_{R_{1-2}} \cdot R_2 = 1\cdot16 = 16(\mathrm{V})$$

$$U_{R_4} = I_{R_{3-4}} \cdot R_4 = 4\cdot2 = 8(\mathrm{V})$$

$$U_{\mathrm{AB}} = U_{R_2} - U_{R_4} = 16-8 = 8(\mathrm{V})$$

ב.

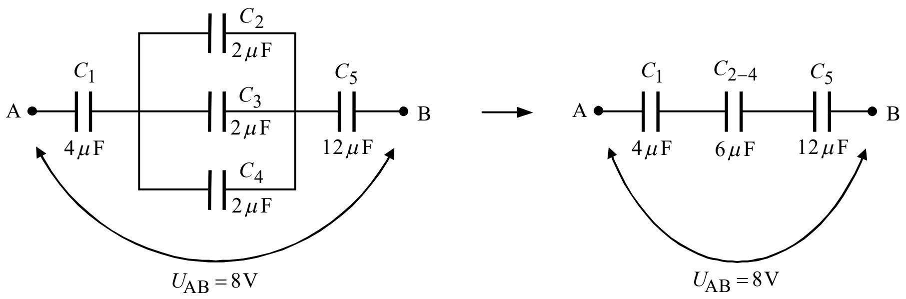
$$U_{R_1} = I_{R_{1-2}} \cdot R_1 = 1\cdot4 = 4(\mathrm{V})$$

$$U_{I_S} = -E + U_{R_1} + U_{R_2} = -100+4+16 = -80(\mathrm{V})$$

$$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 80\cdot5 = 400(\mathrm{W})$$

<u>**הערה:**</u> המתח של מקור הזרם יצא שלילי, מה שאומר שהוא צרכן. מכל מקום נתון זה אינו רלוונטי בשאלה זו.

ג.



בצד שמאל של האיור שרטטנו את מערך הקבלים. המתח בין A ל-B הוא 8V (חושב בסעיף א׳). בצד ימין של האיור מובא מערך הקבלים לאחר צמצום שלושת הקבלים שבמרכז. נחשב את הקיבול השקול:

$$C_{2-4} = C_2 + C_3 + C_4 = 2\mu + 2\mu + 2\mu = 6(\mu\text{F})$$

$$C_\text{T} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2-4}} + \frac{1}{C_5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{6\mu} + \frac{1}{12\mu}\right)^{-1} = 2(\mu\text{F})$$

נחשב את המטען של הקיבול השקול:

$$Q_{C_\text{T}} = U_\text{AB} \cdot C_\text{T} = 8 \cdot 2\mu = 16(\mu\text{C})$$

לקבלים בטור יש מטען זהה. מכאן:

$$Q_{C_1} = Q_{C_{2-4}} = Q_{C_5} = Q_{C_\text{T}} = 16(\mu\text{C})$$

נחשב את מתחי הקבלים:

$$U_{C_1} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{16\mu}{4\mu} = 4(\text{V})$$

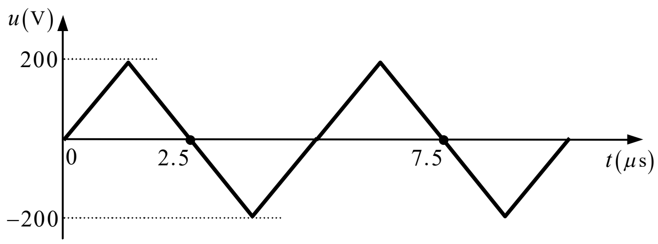
$$U_{C_{2-4}} = \frac{Q_{C_{2-4}}}{C_{2-4}} = \frac{16\mu}{6\mu} = 2.666(\text{V})$$

$$U_{C_5} = \frac{Q_{C_5}}{C_5} = \frac{16\mu}{12\mu} = 1.333(\text{V})$$

המתח $U_{C_{2-4}}$ הוא המתח על כל אחד מהקבלים C_{2-4} (הם מחוברים במקביל). לשלושת קבלים אלה יש גם קיבול זהה. מכאן שגם המטען שלהם יהיה זהה. נחשב את גודל המטען:

$$Q_{C_2} = Q_{C_3} = Q_{C_4} = U_{C_{2-4}} \cdot C_2 = 2.666 \cdot 2\mu = 5.333(\mu\text{C})$$

שאלה 9



הקדמה לפתרון: בשאלה לא ברור אם הגל סימטרי לחלוטין, כלומר האם משך זמן החלק החיובי זהה למשך זמן החלק השלילי. אנו נניח שהגל סימטרי כי אחרת חסרים נתונים. נציין שלרוב אנו פותרים עם המשוואות המלאות הכוללות אינגרל, אולם כאן נעשֶׂה שימוש בנוסחאות מקוצרות, שכן נראה שלכך כיוון כותב השאלה (שלא נתן זמנים של תחילת קטע). כמו כן בנוסחאון של אותו המועד היו רק הנוסחאות המקוצרות. נציין שהנוסחאות שבהן נעשֶׂה שימוש לחישוב הערך הממוצע והיעיל, נכונות רק עבור גל משולש **סימטרי**.

א. מדובר בגל משולש סימטרי. ניעזר בנתונים שעל גבי האות ונחשב את זמן המחזור ואת התדר:

$$T = 7.5\mu - 2.5\mu = 5(\mu\text{s})$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5\mu} = 200000(\text{Hz}) = 200(\text{kHz})$$

ב. הערך הממוצע של גל משולש סימטרי הוא אפס. ובניסוח מתמטי:

$$U_{\text{av}} = 0(\text{V})$$

$$I_{\text{av}} = \frac{U_{\text{av}}}{R} = 0(\text{A})$$

ג. הערך היעיל של גל משולש סימטרי נתון על ידי:

$$U_{\text{rms}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}} = 115.47\,(\text{V})$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{U_{\text{rms}}}{R} = \frac{115.47}{500} = 0.23(\text{A})$$

ד. את ההספק **הממוצע** מחשבים תמיד בעזרת הערך **היעיל** (של המתח או של הזרם). מכאן:

$$P_{\text{av}} = {I_{\text{rms}}}^2 \cdot R = 0.23^2 \cdot 500 = 26.666(\text{W})$$

ה. נחשב את הערך היעיל החדש, בעזרת הנוסחה לערך יעיל של אות מורכב:

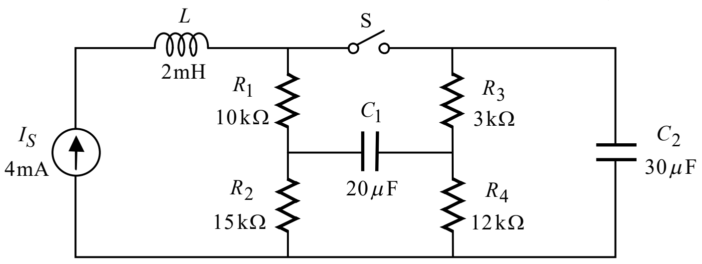
$$U_{\text{rms}_\text{T}} = \sqrt{{U_{\text{rms}_1}}^2 + {U_{\text{rms}_2}}^2} = \sqrt{115.47^2 + 50^2} = 125.83\,(\text{V})$$

מכאן:

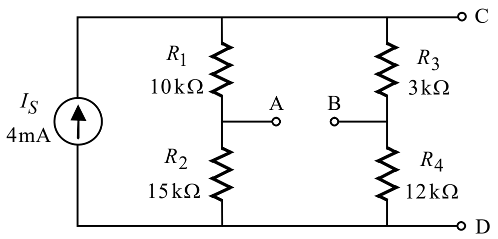
$$P_{\text{av}} = \frac{{U_{\text{rms}_\text{T}}}^2}{R} = \frac{125.83^2}{500} = 31.666(\text{W})$$

שאלה 10

א. נשרטט את המעגל הנתון:



במצב המתמיד הסליל שקול לקֶצר, והקבלים שקולים לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



ניעזר בכלל מחלק הזרם ונחשב את זרמי הענפים:

$$I_{R_{1-2}} = \frac{I_S \cdot R_{3-4}}{R_{1-2} + R_{3-4}} = \frac{4\text{m} \cdot (3\text{k} + 12\text{k})}{10\text{k} + 15\text{k} + 3\text{k} + 12\text{k}} = 1.5(\text{mA})$$

$$I_{R_{3-4}} = I_S - I_{R_{1-2}} = 4\text{m} - 1.5\text{m} = 2.5(\text{mA})$$

נחשב את מתחי הנגדים הנדרשים לפתרון:

$$U_{R_2} = I_{R_{1-2}} \cdot R_2 = 1.5\text{m} \cdot 15\text{k} = 22.5(\text{V})$$

$$U_{R_3} = I_{R_{3-4}} \cdot R_3 = 2.5\text{m} \cdot 3\text{k} = 7.5(\text{V})$$

$$U_{R_4} = I_{R_{3-4}} \cdot R_4 = 2.5\text{m} \cdot 12\text{k} = 30(\text{V})$$

מתחי הקבלים הם המתחים שבין ההדקים שנשארו לאחר ניתוקם מהמעגל. נחשב מתחים אלה בעזרת מסלולי מתחים מתאימים:

$$U_{C_1} = U_{\text{BA}} = +U_{R_4} - U_{R_2} = 30 - 22.5 = 7.5(\text{V})$$

$$U_{C_2} = U_{\text{CD}} = +U_{R_3} + U_{R_4} = 7.5 + 30 = 37.5(\text{V})$$

ב. נחשב את האנרגיה האגורה בקבלים:

$$W_{C_1} = \frac{C_1 \cdot {U_{C_1}}^2}{2} = \frac{20 \times 10^{-6} \cdot 7.5^2}{2} = 0.562(\text{mJ})$$

$$W_{C_2} = \frac{C_2 \cdot {U_{C_2}}^2}{2} = \frac{30 \times 10^{-6} \cdot 37.5^2}{2} = 21.093(\text{mJ})$$

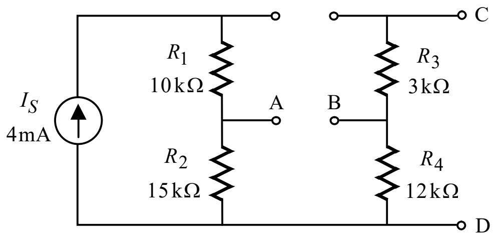
הזרם דרך הסליל הוא הזרם של מקור הזרם. נחשב את האנרגיה האגורה בו:

$$W_L = 16(\text{nJ})$$

ג. המתח הנופל על מקור הזרם הוא המתח בין C ל-D אותו חישבנו לעיל (המתח של C_2).
מכאן:

$$P_{I_S} = U_{I_S} \cdot I_S = 37.5 \cdot 4\text{m} = 0.15(\text{W})$$

ד. במצב המתמיד כאמור הסליל שקול לקֶצר, והקבלים שקולים לנֶתק. נשרטט מעגל שקול:



במעגל המתקבל במצב המתמיד, אין זרם דרך R_3 ו-R_4 והמתח שלם הוא אפס. נחשב את המתח של C_1 בעזרת מסלול מתחים:

$$U_{C_1} = U_{\text{BA}} = U_{R_2} = I_S \cdot R_2 = 4\text{m} \cdot 15\text{k} = 60(\text{V})$$

נחשב את האנרגיה האגורה בקבל זה:

$$W_{C_1} = \frac{C_1 \cdot U_{C_1}^{\ 2}}{2} = \frac{20 \times 10^{-6} \cdot 60^2}{2} = 36(\text{mJ})$$

לגבי C_2, מאחר ואין כאמור מתח על R_3 ו-R_4, המתח של C_2 הוא אפס, וכך גם האנרגיה שלו. ובניסוח מתמטי:

$$U_{C_2} = 0(\text{V})$$

$$W_{C_2} = 0(\text{J})$$